FB MI Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Thomas Schuster
M.Sc. Rebecca Klein

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Wintersemester 2019/20

7. Übungsblatt zur Höheren Mathematik für Ingenieure 3

Aufgabe 1 **3+2=5 Punkte**

(i) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ zwei zueinander ähnliche Matrizen. Zeigen Sie, dass dann die charakteristischen Polynome der beiden Matrizen übereinstimmen. Was bedeutet dies für die Eigenwerte und deren algebraische Vielfachheit der beiden Matrizen?

(ii) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann invertierbar ist, wenn für alle Eigenwerte λ_i, $i = 1, ..., n$, der Matrix A gilt $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, ..., n$.

Aufgabe 2 **3+1=4 Punkte**

(i) Sei

$$D = \begin{pmatrix} a & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$$

mit $a \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}^{1\times m}$ und $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Polynome der Matrizen gilt

$$\chi_D(\lambda) = (a - \lambda)\chi_C(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(ii) Für Blockmatrizen der Form

$$D = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gilt $\chi_D(\lambda) = \chi_A(\lambda) \cdot \chi_C(\lambda)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Das müssen Sie nicht zeigen. Bestimmen Sie mit diesem Ergebnis die Eigenwerte der Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 **3+2=5 Punkte**

Gegeben sei die reelle 3×3-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t).$$

(ii) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t), \qquad \underline{y}(0) = (0, 0, 2)^\top.$$

Aufgabe 4 **2+1+1+2=6 Punkte**

Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie $\underline{b}_1, \underline{b}_2 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es ist bekannt, dass $A\underline{b}_1 = 6\underline{b}_1$ und $A\underline{b}_2 = 2\underline{b}_2$ gelten.

(i) Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A an. Schließen Sie die Existenz von 3 linear unabhängigen Eigenvektoren aus.

(ii) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $\underline{w} := (\alpha, \beta, 0)^\top$ ein Hauptvektor der Matrix A ist.

(iii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t).$$

(iv) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}_1, \qquad \underline{y}(0) = \frac{5}{6}\underline{b}_1 - \underline{b}_2.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass $A\underline{b}_1 = 6\underline{b}_1$ gilt.

Abgabe: Donnerstag, 05.12.2015 **bis** 8.30 Uhr