FB MI Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Thomas Schuster
M.Sc. Rebecca Klein

Wintersemester 2019/20

8. Übungsblatt zur Höheren Mathematik für Ingenieure 3

Aufgabe 1 **1+1+2=4 Punkte**

Die Funktionen $\tilde{f}_i : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\} \to \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 3$ seien gegeben durch

$$\tilde{f}_i(x,y) = \begin{cases} f_i(x,y), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dabei gelte

(i)
$$f_1(x,y) = x \sin\left(\frac{1}{y}\right)$$

(ii)
$$f_2(x,y) = x^y$$

(iii)
$$f_3(x,y) = \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}.$$

Sind die Funktionen $\tilde{f}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ stetig im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis zu (iii): Es darf ohne Beweis $|\sin(t)| \leq |t|$ für alle $t \in \mathbb{R}$ verwendet werden.

Aufgabe 2 **2+3=5 Punkte**

Seien $a, b \geq 0$.

(i) Man zeige, dass für $a + b > 2$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^a |y|^b}{x^2 + y^2} = 0$$
gilt.

(ii) Man zeige, dass für $a + b \leq 2$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^a |y|^b}{x^2 + y^2}$$
nicht existiert.

Aufgabe 3 **2+1+2=5 Punkte**

Sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(t) := \begin{pmatrix} e^{ct}\cos(t) \\ e^{ct}\sin(t) \end{pmatrix}.$$

(i) Für $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sei $L_{a,b}$ die Bogenlänge der Kurve f auf dem Intervall $[a,b]$. Berechnen Sie $L_{a,b}$.

(ii) Existiert $\lim\limits_{a\to-\infty} L_{a,0}$?

(iii) Zeigen Sie, dass die Kurve f jeden Kreis um den Nullpunkt in genau einem Punkt schneidet.
Hinweis: Ein Kreis um den Nullpunkt mit Radius $r > 0$ hat die Darstellung
$K_r : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$K_r(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 **2+4=6 Punkte**

Gegeben sei der Zykloidenbogen

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a(t - \sin(t)) \\ a(1 - \cos(t)) \end{pmatrix}$$

für $t \in [0, 2\pi)$ und $a > 0$.

(i) Berechnen Sie die Länge $L(\gamma)$.

(ii) Parametrisieren Sie den Zykloidenbogen als Funktion $\tilde{\gamma}(\tau)$ nach der Bogenlänge τ um und zeigen Sie, dass $\|\tilde{\gamma}'(\tau)\| = 1$ gilt.

Hinweis: Es gilt $1 - \cos(x) = 2(\sin\frac{x}{2})^2$ und $\cos(2x) = 2(\cos(x))^2 - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Abgabe: Donnerstag, 12.12.2019 **bis** 8.30 Uhr