FB MI Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Thomas Schuster
M.Sc. Rebecca Klein

Wintersemester 2019/20

10. Übungsblatt zur Höheren Mathematik für Ingenieure 3

Aufgabe 1 **2+2+1=5 Punkte**

Es sei

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y \text{ und } x \neq 0\}.$$

Außerdem sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} e^x - 1, & (x,y) \in M, \\ 0, & (x,y) \notin M. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) f ist in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann partiell differenzierbar, wenn $(x,y) \notin M$ gilt.

(ii) Die Richtungsableitung $D_{\underline{\nu}} f(\underline{0})$ von f in $\underline{0}$ existiert für jedes $\underline{\nu} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\underline{\nu}\| = 1$.

(iii) Es gibt ein $\underline{\nu} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\underline{\nu}\| = 1$ und

$$D_{\underline{\nu}} f(\underline{0}) \neq \langle \underline{\nu}, \nabla f(\underline{0}) \rangle.$$

Woran könnte das liegen?

Aufgabe 2 **2+3=5 Punkte**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = 3\sqrt{\frac{x^2}{y}} + 2\cos(\pi(x+2y)).$$

Außerdem betrachten wir den Punkt $(2,1) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f. Berechnen Sie $\nabla f(2,1)$ und vereinfachen Sie dabei soweit wie möglich.

(ii) Bestimmen Sie die Tangentialebene im Punkt $(2,1,f(2,1))$. Berechnen Sie dazu $\bar{z} = f(2,1)$ und beachten Sie, dass der Punkt $(2,1,\bar{z})$ in der Tangentialebene liegen muss. Wie sieht die Gleichung der Tangentialebene an f in $(2,1,\bar{z})$ in der Form $z = ax + by + c$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$ aus?

Aufgabe 3 **2+3=5 Punkte**

(i) Sei für $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x, y) := x^3 + axy^2$$

gegeben. Für welche $a \in \mathbb{R}$ erfüllt f_1 die Laplace-Gleichung $\Delta f_1 = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

(ii) Sei $f_2 : \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_2(\underline{x}) = \frac{1}{\|\underline{x}\|}$$

für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$. Zeigen Sie, dass $\Delta f_2 = 0$ gilt.

Anmerkung: Man nennt f_2 auch Fundamentallösung der Laplace-Gleichung.

Aufgabe 4 **1+2+2=5 Punkte**

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass dann gilt

(i)
$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$$

(ii)
$$\operatorname{div}(g\nabla f) = \langle \nabla g, \nabla f\rangle + g \cdot \operatorname{div}(\nabla f)$$

(iii) mit (i) und (ii)
$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + g\Delta f.$$

Abgabe: Donnerstag, 09.01.2019 **bis** 8.30 Uhr

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!