FB MI Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Thomas Schuster
M.Sc. Rebecca Klein

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Wintersemester 2019/20

11. Übungsblatt zur Höheren Mathematik für Ingenieure 3

Aufgabe 1 **3 Punkte**

Seien $c > 0$, $\underline{k} \in \mathbb{R}^n$ und $\omega := \|\underline{k}\| c$. Außerdem sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(\underline{x}, t) := f(\langle \underline{k}, \underline{x} \rangle - \omega t)$$

eine Lösung der Wellengleichung

$$\Delta F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

ist.
Anmerkung: Für $f(z) = e^{iz}$ beschreibt $F(\underline{x}, t)$ eine ebene Welle.

Aufgabe 2 **2+3=5 Punkte**

Es sei eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben, die die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

löst und mindestens dreimal stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass die Funktion $v : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$v(\underline{x}, t) = \langle \underline{x}, \nabla u(\underline{x}, t) \rangle + 2t \frac{\partial u}{\partial t}(\underline{x}, t)$$

auch eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist,

(i) durch direketes Nachrechnen,

(ii) indem Sie sowohl zeigen als auch verwenden, dass mit u auch die Funktion $w : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $w(\underline{x}, t; \mu) = u(\mu \underline{x}, \mu^2 t)$ bei festem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Aufgabe 3 **5 Punkte**

Zeigen Sie, dass der zweidimensionale Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ in Polarkoordinaten $(x_1, x_2) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ für $r > 0$ und $0 < \varphi < 2\pi$ die Gestalt

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

annimmt.

Aufgabe 4 **2+3+2=7 Punkte**

a) Sei $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ eine $|\alpha|$-mal stetig differenzierbare Funktion. Welche Ableitungen verbergen sich hinter den Ausdrücken D^α für das Tupel

(i) $\alpha = (1, 0, 1, 0)$,

(ii) $\alpha = (1, 2, 4, 1)$,

(iii) $\alpha = (0, 1, 1, 2)$,

(iv) $\alpha = (1, 3, 2, 0)$?

b) Gegeben sei die Funktion
$$f(x, y) = x^2 \cdot e^{2x-y}.$$

(i) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 1. Ordnung im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

(ii) Schätzen Sie den Betrag des Restgliedes im Bereich $U = \{(x, y) | |x - 1| \leq 0.2, |y| \leq 0.1\}$ sinnvoll (grob) nach oben ab.

Abgabe: Donnerstag, 16.01.2020 **bis** 8.30 Uhr