FB MI Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Thomas Schuster
M.Sc. Rebecca Klein

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Wintersemester 2019/20

13. Übungsblatt zur Höheren Mathematik für Ingenieure 3

Aufgabe 1 **1+2+1=4 Punkte**

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x + 2y^2 \\ y - \sin(x) \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f.

(ii) Zeigen Sie, dass f in einer Umgebung des Punktes $(\frac{\pi}{2}, 1)$ umkehrbar ist.

(iii) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der Umkehrabbildung von f im Punkt $(2 + \frac{\pi}{2}, 0)$.

Aufgabe 2 **2+2=4 Punkte**

(i) Bestimmen Sie das Minimum der Funktion

$$f(x,y,z) = x + y + z$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = xyz - 1 = 0,$$

sowie $x, y, z > 0$.
Hinweis: Es kann darauf verzichtet werden, dass Sie zeigen, dass es sich bei der von Ihnen ermittelten Extremstelle um eine Minimumstelle handelt.

(ii) Leiten Sie aus der Teilaufgabe (i) die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel her: Für $x, y, z > 0$ gilt stets

$$xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3.$$

Aufgabe 3 **3+2+1=6 Punkte**

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 1 + yx^2$$

auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$

(i) durch Einsetzen der Nebenbedingung in die Funktion f

(ii) mithilfe eines Lagrangeschen Multiplikators.

Gibt es Unterschiede in den Lösungen?
Hinweis: Es genügt insgesamt einmal die Art des jeweiligen Extremums zu bestimmen.

Aufgabe 4 **3+2+1=6 Punkte**

Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} x_1 + x_2x_3 \\ x_2 + x_1x_3 \\ x_3 + x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \langle F, d\underline{x} \rangle,$$

wenn

(a) γ die Strecke von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 1, 1)$ ist,

(b) γ die Kurve mit der Parametrisierung $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = t^3$ mit $0 \leq t \leq 1$ ist,

(c) γ die drei Strecken von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 0, 0)$, dann von $(1, 0, 0)$ nach $(1, 1, 0)$ und abschließend von $(1, 1, 0)$ nach $(1, 1, 1)$ durchläuft.

Stellen Sie anhand Ihrer Lösungen von Aufgabenteil (i) eine Vermutung über die Weg(un)abhängigkeit des Kurvenintegrals auf.

(ii) Ist das Vektorfeld F konservativ? Wenn ja, geben Sie ein Potential von F an.

(iii) Beweisen (oder widerlegen) Sie Ihre Vermutung über die Weg(un)abhängigkeit des Kurvenintegrals mithilfe von (ii).

Aufgabe 5 Bonusaufgabe **1+1+3=5* Punkte**

Gegeben sei die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + 1.$$

(i) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

(ii) Berechnen Sie die Hessesche Matrix von f.

(iii) Zeigen Sie, dass f keine lokalen Extrema besitzt.

Abgabe: Donnerstag, 30.01.2019 **bis** 8.30 Uhr