**FB MI Mathematik**
Univ.-Prof. Dr. Thomas Schuster
M.Sc. Rebecca Klein

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Wintersemester 2019/20

# 3. Übungsblatt zur Höheren Mathematik für Ingenieure 3

**Aufgabe 1** **4 Punkte**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) + 4y(t) = \frac{t+6}{t-2} \cdot e^{-4t}$$

für $t > 2$.
Hinweis: Verwenden Sie für die Bestimmung einer speziellen Lösung der Differentialgleichung die *Variation der Konstanten*.

**Aufgabe 2** **2+2=4 Punkte**

Geben Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen Differentialgleichung

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = r_k(x)$$

an mit $k = 1, 2$ und

(a) $r_1 = 108x^2$

(b) $r_2 = 18 + 14e^{3x}$.

**Hinweis zu (b):** Betrachten Sie die beiden Summanden auf der rechten Seite getrennt voneinander.

**Aufgabe 3** **2+2+3=7 Punkte**

Eine Differentialgleichung 1.Ordnung vom Typ

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x) \cdot g(y)$$

lässt sich durch *Trennung der Variablen* lösen. Dabei wird die Differentialgleichung zunächst wie folgt umgestellt:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad (g(y) \neq 0).$$

Die linke Seite der Gleichung enthält nur noch die Variable $y$ und deren Differential $dy$ und die rechte Seite dagegen nur noch die Variable $x$ und deren Differential $dx$. Anschließend werden beide Seiten unbestimmt integriert:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Die dann in Form einer impliziten Gleichung vom Typ $F_1(y) = F_2(x)$ vorliegende Lösung wird nach der Variablen $y$ aufgelöst, was in den meisten Fällen möglich ist, und wir erhalten die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x) \cdot g(y)$ in der expliziten Form $y = y(x)$. Lösen Sie mithilfe dieser Methode die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung:

(a)
$$y' = x(y^2 + 1)$$

(b)
$$y' = y \cdot \sin(x)$$

(c)
$$xy'(x) - 3y(x) = x^2.$$

**Hinweis zu (c):** Verwenden Sie zur Bestimmung einer speziellen Lösung die *Variation der Konstanten.*

**Aufgabe 4** **2+3=5 Punkte**

Eine lineare Differentialgleichung 1.Ordnung hat die Form

$$(*) \;\; y' + a(x)y = b(x),$$

wobei $a(x)$ und $b(x)$ gegebene Funktionen seien, die auf einem Intervall $I$ definiert und stetig sind.

(a) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung mithilfe der *Trennung der Variablen.*

(b) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung von $(*)$ die folgende Form hat

$$y(x) = C \cdot e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}dx,$$

wobei $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ auf $I$ und $C \in \mathbb{R}$ ist.

**Abgabe:** Donnerstag, 07.11.2019 **bis** 8.30 Uhr