FB MI Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Thomas Schuster
M.Sc. Rebecca Klein

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Wintersemester 2019/20

4. Übungsblatt zur Höheren Mathematik für Ingenieure 3

Aufgabe 1 **3+1=4 Punkte**

Gegeben seien

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 12 & -13 & 6 \end{pmatrix}$$

und

$$x(t) = e^t \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2+t \\ -1+t \\ t \\ 1+t \end{pmatrix} \right] + e^{2t} \left[c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -1+t \\ -1+2t \\ 4t \\ 4+8t \end{pmatrix} \right]$$

mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Es ist bekannt, dass $x(t)$ Lösung des Differentialgleichungssystems

$$x'(t) = Bx(t),\ t \in \mathbb{R},$$

ist. Dies muss **nicht** nachgerechnet werden!

(a) Zeigen Sie, dass das System zur linearen Differentialgleichung

$$(**) \qquad u^{(4)} - 6u''' + 13u'' - 12u' + 4u = 0$$

äquivalent ist.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung von $(**)$ an.

Hinweis: Die Lösung von $(**)$ ist aus $x(t)$ abzuleiten und **nicht** mit Hilfe des charakteristischen Polynoms von $(**)$ zu berechnen.

Aufgabe 2 **2+1+2+1=6 Punkte**

Gegeben sei das folgende System von Differentialgleichungen 1.Ordnung

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{x} & \frac{1+x}{x} \end{pmatrix} \underline{y} + \begin{pmatrix} 1 + \cos(x)(1+x) \\ 1 + \cos(x) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\bar{\underline{y}}_h = \begin{pmatrix} 1+x \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\underline{y}}_h = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}$$

Lösungen des zu (1) zugehörigen homogenen Systems sind.

(b) Bilden die in (a) untersuchten Lösungen des homogenen Systems für $x > 0$ ein Fundamentalsystem? Geben Sie die entsprechende Fundamentalmatrix $Y(x)$ an!

(c) Bestimmen Sie mithilfe der Variation der Konstanten eine spezielle Lösung von (1).

(d) Geben Sie mithilfe der vorherigen Teilaufgaben die allgemeine Lösung von (1) an.

Aufgabe 3 **2+2+2=6 Punkte**

Welche Eigenwerte besitzen die folgenden symmetrischen Matrizen?

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Abgabe: Donnerstag, 14.11.2019 **bis** 8.30 Uhr