FB MI Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Thomas Schuster
M.Sc. Rebecca Klein

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Wintersemester 2019/20

9. Übungsblatt zur Höheren Mathematik für Ingenieure 3

Aufgabe 1 **1+1+2+1=5 Punkte**

Sei B eine Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0)$. Der Kreis mit Radius $\frac{1}{4}$ und Mittelpunkt $(\frac{3}{4},0)$ werde wie ein Rad auf dem inneren Rand von B entlang gerollt, so dass

$$m(t) := \frac{3}{4}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

der Mittelpunkt zum Zeitpunkt t ist. Es sei außerdem $c : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ der Weg, den der am Anfang auf $(1,0)$ liegende Punkt A dabei durchläuft.

(i) Skizzieren Sie die Kurve c.

(ii) Sei $v(t) = c(t) - m(t)$. Zeigen Sie:

$$v(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \cos(-3t) \\ \sin(-3t) \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Wählen Sie dazu als Ansatz

$$v(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \cos(x(t)) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}$$

mit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und überlegen Sie sich, wie man c beschreiben könnte.

(iii) Folgern Sie:

$$c(t) = \begin{pmatrix} (\cos(t))^3 \\ (\sin(t))^3 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Eulersche Formel $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ zur Darstellung von Potenzen von sin und cos.

(iv) Ist c auf dem Intervall $[0,2\pi]$ regulär? Falls nicht, für welche $t \in [0,2\pi]$ ist c singulär?

Aufgabe 2 **2+2=4 Punkte**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Zeigen Sie, dass f stetig partiell differenzierbar in $(0,0)$ ist.

Aufgabe 3 **2+3=5 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = |xy|.$$

In welchen Punkten ist f partiell bzw. total differenzierbar? Berechnen Sie in den entsprechenden Punkten die partielle bzw. totale Ableitung von f.

Aufgabe 4 **1+1+3+1=6 Punkte**

Um das viele Essen an den Weihnachtsfeiertagen zu verdauen, macht Herr N. eine Wanderung in einem Gebiet in den Vogesen, dessen Topografie durch die Funktion

$$f(x,y) = x^2y - xy^2 + 3xy - 5x^2 + 10x + 5y^2 - 40y + 500$$

gegeben ist, wobei $x, y \in [0,10]$ Koordinaten (in Kilometern) sind und $f(x,y)$ die Höhenmeter angibt. In den ersten zwei Stunden, $t \in [0,2]$ in Stunden, verläuft sein Wanderweg entlang des Wegs

$$\underline{c}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t - t^2 \\ 6 - 2t \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

(ii) Zeigen Sie, dass die beiden Geraden $x = 5$ und $y = 5$ im $\mathbb{R}^2$ zwei sogenannte Höhenlinien sind dadurch, dass Sie ausrechnen, dass f auf diesen Geraden konstant ist. Zeigen Sie außerdem, dass der Gradient senkrecht auf den Tangentenvektoren der Höhenlinien steht.

(iii) Bestimmen Sie sowohl Herrn N.'s Wandergeschwindigkeit als auch seine momentane Wanderrichtung $\underline{r}(t)$ zum Zeitpunkt t. Berechnen Sie den Anstieg des Wanderwegs bei $t = 1$, also die Richtungsableitung von f in Wanderrichtung bei $\underline{c}(1)$.

(iv) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f \circ \underline{c}$ mithilfe der Kettenregel. Was ist Herrn N.'s Anstiegsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1$?

Abgabe: Donnerstag, 19.12.2019 **bis** 8.30 Uhr