Die numerische Realisierung der Eikonalapproximation zur Lösung eines inversen Streuproblems in der Ultraschalltomographie

Diplomarbeit
von
Michael Krause

nach einem Thema von
Univ.-Prof. Dr. A.K. Louis

Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
2001

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, den 28.02.01

Michael Krause

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Will man nichtinvasiv Informationen über ein Objekt erhalten, die von außen nicht sichtbar sind, so wird man versuchen, diese Informationen indirekt zu erhalten. Dies ist z.B. in der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung oder in der Computertomographie der Fall. Dabei wird ein zu untersuchendes Werkstück, bzw. ein Patient mit akustischen oder elektromagnetischen Wellen bestrahlt, und die jeweils verwendeten Wellen werden nach der Bestrahlung des Objekts von Detektoren gemessen. Sind die Detektoren auf der Seite des Objekts, die der Quelle der Strahlung gegenüberliegt, so spricht man von Transmissionstomographie. Der einfachste Fall der Transmissionstomographie ist die (Röntgen-)Computertomographie. Dazu wird eine zweidimensionale Schicht des zu untersuchenden Objekts mit Röntgenstrahlen bestrahlt, und nach Durchquerung des Objekts gemessen. Aus der Abschwächung der Röntgenstrahlen kann man die "Dichte" des Objekts ermitteln.

Ist es nicht möglich, Röntgenstrahlen zur Untersuchung einzusetzen, so wird man andere Wellen zur Untersuchung verwenden, z.B. Ultraschall. Dies ist z.B. dann der Fall, falls in der zerstörungsfreien Materialprüfung ein Objekt nicht für Röntgenstrahlen durchlässig ist. In der medizinischen Anwendung der Tomographie wird man aufgrund der Strahlenbelastung die Verwendung von Röntgenstrahlen möglichst vermeiden, wenn andere Untersuchungsmethoden zur Verfügung stehen. In einigen Fällen ist es auch unsinnig, Röntgenstrahlen zur Untersuchung einzusetzen.

In dieser Arbeit wird ein Ansatz zur Lösung des *inversen Streuproblems* in der *Ultraschalltomographie* untersucht werden. Dieses inverse Streuproblem besteht darin, dass man ein Objekt mit Ultraschall bestrahlt, und das daraus resultierende gestreute Feld wird auf einer (Mess-)Fläche außerhalb des Objekts gemessen. Das Ziel ist es, den *Brechungsindex* $n(x)$ relativ zum als konstant angenommenen Hintergrundmedium zu bestimmen. Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die (inhomogene) *Helmholtz-Gleichung*

$$(\Delta + k^2)u = k^2 V_A u.$$

k ist die *Wellenzahl*, $V_A := 1 - n^2$ ist die gesuchte *Objektfunktion*, und die vom Ort abhängige Funktion u stellt die Welle dar. In Anwendungen der Helmholtz-Gleichung im quantenmechanischen Fall ist die rechte Seite der Helmholtz-Gleichung von k unabhängig. Deshalb werden wir $V := k^2 V_A$ setzen.

Die Helmholtz-Gleichung ist äquivalent zur *Lippmann-Schwinger-Gleichung*

$$u(x) = u_\theta^i(x) - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} V(y)u(y)\,dy.$$

$u_\theta^i(x) = e^{ik<\theta,x>}$ sei die einfallende ebene Welle mit Einfallsrichtung θ, und u sei die Summe aus einfallender Welle u_θ^i und gestreuter Welle u^s. u^s hat das asymptotische Verhalten

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} f\left(k, \theta, \frac{x}{|x|}\right) + o(|x|^{-1}),\ \ |x| \to \infty.$$

Die Funktion f nennt man das *Fernfeld.*

Die *Eikonalapproximation*, die in dieser Arbeit untersucht wird, wurde ursprünglich entwickelt, um bei gegebenem Objekt V das zugehörige Fernfeld f näherungsweise berechnen zu können. Die Eikonalapproximation $A_k V$ ist gegeben durch

$$A_k V(\theta, \theta') := -\frac{ik}{2\pi}\int_{\omega^\perp} e^{-ik<\theta-\theta',b>}\left(\exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\infty} V(b+r\omega)\,dr\right) - 1\right) db,$$

und es soll $A_k V(\theta, \theta') \approx f(k, \theta, \theta')$ gelten. Die Auswertung der Eikonalapproximation erfordert also nur die Berechnung von Integralen. Im Gegensatz dazu müsste man bei "exakter" Vorgehensweise bereits bei der Berechnung des *Nahfelds* u eine Integral- bzw. eine partielle Differentialgleichung lösen. Da bei der Formulierung des inversen Streuproblems sowohl das gestreute Feld u^s als auch das gesuchte Objekt V unbekannt sind, werden die zu lösenden Gleichungen in diesem Fall nichtlinear. Die Eikonalapproximation lässt sich in wohlbekannte lineare, invertierbare Operatoren, darunter dir *Röntgentransformation* $\mathcal{P}$ und die *Fouriertransformation* $\mathcal{F}_{\omega^\perp}$, und in eine punktweise auf Funktionen wirkende Exponentialfunktion $\mathcal{E}$ zerlegen, die in Abhängigkeit vom Realteil von V auch invertierbar ist. Deshalb könnte man die Eikonalapproximation dazu verwenden, sich das Lösen einer nichtlinearen Integralgleichung zu "ersparen", und stattdessen eine Folge von miteinander verknüpften linearen Operatoren zu invertieren.

Im ersten Kapitel werden die bekannten mathematischen Grundlagen vorgestellt, die in dieser Arbeit verwendet werden, und gegebenenfalls in der Notation an den Rest dieser Arbeit angepasst. Es werden die benötigten Definitionen angegeben, und es werden die Sätze zitiert, die in späteren Kapiteln dieser Arbeit verwendet werden. Zuerst wird das mathematische Modell vorgestellt, das der Ultraschalltomographie zugrunde liegt. Als Nächstes folgt die Fouriertransformation, die sowohl als Objekt der Untersuchung, als auch als mathematisches Hilfsmittel verwendet werden wird. Da die Eikonalapproximation eine Beziehung zwischen der Ultraschalltomographie und der Röntgentomographie herstellt, folgt eine Darstellung der Röntgentransformation und ihrer wichtigsten Eigenschaften.

Im zweiten Kapitel wird die Eikonalapproximation untersucht. Die Herleitung der Eikonalapproximation ist im Wesentlichen aus [9] übernommen. Diese Herleitung der Eikonalapproximation besteht darin, dass zuerst eine Approximation $u_{\theta,\theta'}$ an das Nahfeld u_θ im Innern des Trägers von V berechnet wird,

$$u_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega) = e^{ik<b+\rho\omega,\theta>} \cdot e^{-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho} V(b+r\omega)\,dr}, \;\; \omega = \frac{\theta+\theta'}{|\theta+\theta'|}, \;\; b \in \omega^\perp.$$

Die Approximation $u_{\theta,\theta'}$ an das Nahfeld wird im dritten Kapitel dazu benutzt werden, das Objekt V aus Nahfelddaten zu rekonstruieren. Die Formel

$$f(k,\theta,\theta') = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik<\theta',y>} V(y)u_\theta(y)\,dy$$

stellt eine Beziehung zwischen Nah- und Fernfeld her. Setzt man die oben angegebene Approximation an das Nahfeld ein, so erhält man die Eikonalapproximation $A_kV(\theta,\theta')$ zur näherungsweisen Berechnung des Fernfelds. Als Nächstes wird die oben erwähnte Zerlegung der Eikonalapproximation in einzelne Operatoren besprochen (vgl. [9]), und eine daraus folgende Inversionsformel angegeben.

Wendet man die inverse Eikonalapproximation auf das gestreute Feld an, so erhält man eine Approximation an das exakte Objekt V. Will man das Objekt aus Fernfelddaten rekonstruieren, so muss man die zur Inversion notwendigen Daten $f(k,\theta,\theta')$ in einer speziellen Messgeometrie messen, um nach einer inversen Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp}$ die zur Inversion der Röntgentransformation benötigten Daten zur Verfügung zu haben. Kann man die Daten nicht an den zur Inversion notwendigen Stellen messen, so muss man sie aus den bekannten Daten interpolieren. Die Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\omega^\perp}$ ist für $\omega \in S^2$ auf $\omega^\perp$ definiert, während die Eikonalapproximation A_kV bzw. das Fernfeld f für festes k auf $S^2 \times S^2$ definiert sind. Deshalb werden die Formeln zur Inversion der Eikonalapproximation durch eine Koordinatentransformation an die "Messmannigfaltigkeit" $S^2 \times S^2$ angepasst, auf der die Messpunkte liegen. Bei der Rekonstruktion aus Nahfelddaten muss man lediglich die Röntgentransformation numerisch invertieren. Die dabei verwendeten Messgeometrien und die auftretenden Probleme sind im Wesentlichen mit denen in der Röntgencomputertomographie identisch.

Es stellt sich nun die Frage, welche Fehler durch diese Vorgehensweise entstehen. Um den Fehler zu bestimmen, der bei der Lösung des inversen Streuproblems entsteht, ist es notwendig, zuerst den Fehler zu untersuchen, der bei der Lösung des direkten Streuproblems entsteht. Deshalb wird zuerst die Differenz zwischen exaktem Nah- bzw. Fernfeld und der jeweils verwendeten Approximation untersucht. Dazu wird die Vorgehensweise in [9] analysiert. Die Lippmann-Schwinger-Gleichung schreiben wir in Kurzform als

$$(I - A_V)u_\theta = u_\theta^i,$$

wobei A_V den von V abhängigen Integraloperator darstellt, der in der Lippmann-Schwinger-Gleichung auftritt. A_V kann man in zwei Operatoren

$$A_V = A_{V,1} + A_{V,2}$$

aufspalten. $A_{V,1}$ ist gegeben durch

$$A_{V,1}u_{\theta,\theta'}(x) = -\frac{i}{2k}\int_0^\infty e^{ikr<\theta,\omega>}V(x-r\omega)u_{\theta,\theta'}(x-r\omega)\,dr.$$

Die Approximation $u_{\theta,\theta'}$, die in [9] hergeleitet wird, ist dann die Lösung von

$$(I - A_{V,1})u_{\theta,\theta'} = u_\theta^i, \ \lim_{\rho\to-\infty}\frac{u_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega)}{u_\theta^i(b+\rho\omega)} = 1.$$

Definiert man den Fehler $d_{\theta,\theta'}$ als $d_{\theta,\theta'} = u_\theta - u_{\theta,\theta'}$, so erhält man mit $x = b+\rho\omega$, $b \in \omega^\perp$, $\rho \in \mathbb{R}$, die Gleichung

$$d_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega) = -\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^\rho e^{ik(\rho-t)<\theta,\omega>}V(b+t\omega)d_{\theta,\theta'}(b+t\omega)\,dt + A_{V,2}u_\theta(b+\rho\omega).$$

Hat V kompakten Träger, und sind V und $A_{V,2}u_\theta$ beide beschränkt, so kann man den Betrag von $d_{\theta,\theta'}$ mit Hilfe des Gronwall-Lemmas abschätzen. Die Differenz zwischen dem Fernfeld f und der Eikonalapproximation A_kV kann man dann mit Hilfe der Beziehung zwischen Nah- und Fernfeld abschätzen.

Der bei der Lösung des direkten Streuproblems mit Hilfe der Eikonalapproximation entstehende Fehler dient als Ausgangspunkt für die folgende Untersuchung des Fehlers, der bei der Lösung des inversen Streuproblems mit Hilfe der Eikonalapproximation entsteht. Dazu wendet man die inverse Eikonalapproximation auf das Fernfeld an, und untersucht, wie sich die Differenz aus exaktem Fernfeld und Eikonalapproximation durch Anwendung der einzelnen Operatoren verändert, in die wir die Eikonalapproximation zerlegt haben.

Im Allgemeinen ist es in der Tomographie einfacher, zweidimensionale Probleme zu betrachten, als dreidimensionale Probleme zu betrachten. Was die Ultraschalltomographie betrifft, so ist es im dreidimensionalen Fall auch wesentlich komplizierter, die zum Testen der Programme notwendigen Daten numerisch zu erzeugen, wenn keine gemessenen Daten zur Verfügung stehen. Um die Eikonalapproximation invertieren zu können, oder um das Objekt mit Hilfe unserer Approximation aus Nahfelddaten berechnen zu können, muss man eine Inversionsformel für die Röntgentransformation kennen. Solche Inversionsformeln sind im zweidimensionalen Fall wohlbekannt, während im dreidimensionalen Fall Schwierigkeiten auftreten, was die (schnelle) Implementierung, bzw. die verwendeten Messgeometrien betrifft. Deshalb wäre es sinnvoll, die Eikonalapproximation zur Lösung eines zweidimensionalen inversen Streuproblems einsetzen zu können.

Bei der Herleitung der Eikonalapproximation ist man von einem dreidimensionalen Streuproblem ausgegangen. Deshalb wird es Schwierigkeiten geben, das

Objekt aus 2D-Fernfelddaten zu rekonstruieren, da man bei der Inversion der Eikonalapproximation eigentlich 3D-Fernfelddaten verwenden müsste. Die Frage, wie man diese Schwierigkeit lösen könnte, wird am Ende des zweiten Kapitels behandelt.

Schließlich werden im dritten Kapitel die in Kapitel 2 beschriebenen Vorgehensweisen anhand von numerischen Beispielen untersucht. Zuerst wird die numerische Inversion der Eikonalapproximation besprochen. Dabei wird das Vorwärtsproblem durch die Eikonalapproximation und das inverse Problem durch die inverse Eikonalapproximation modelliert, die dabei auftretenden Fehler werden also nur aus numerischen Gründen entstehen. Es stellt sich dabei heraus, dass bereits ein in der Eikonalapproximation implizit vorhandener Tiefpassfilter bei der Rekonstruktion Schwierigkeiten verursachen kann. Im dreidimensionalen Fall wird in den Beispielen nicht auf eine spezielle (realistische) Messgeometrie eingegangen. Es werden die zur Inversion benötigten Daten berechnet, unabhängig davon, ob man diese Daten in einer Messgeometrie messen könnte, oder nicht. Im zweidimensionalen Fall wird auf eine realistisch erscheinende Messgeometrie eingegangen. Sowohl im 3D-Fall als auch im 2D-Fall werden die Rekonstruktionen mit größerer Wellenzahl besser. Ist das Objekt $V = k^2 V_A$ von k abhängig, so gibt es bei größeren Wellenzahlen allerdings Schwierigkeiten, da die Exponentialfunktion $\mathcal{E}$ nicht auf ganz $\mathbb{C}$ injektiv ist.

Zuletzt wird noch untersucht, welche Ergebnisse man erhält, wenn man die Approximation $u_{\theta,\theta}$ an das Nahfeld zur Rekonstruktion des Objekts aus Nahfelddaten benutzt. Die Approximation $u_{\theta,\theta}$ an das Nahfeld hat man dadurch erhalten, dass man Wechselwirkungen zwischen dem Objekt V und der Welle u nur auf einer Linie betrachtet hat. Bei kleinen Wellenzahlen treten auch Streueffekte auf, und man kann deshalb die Welle nicht isoliert auf einer Linie betrachten. Deshalb werden die Ergebnisse besser, wenn die Wellenzahl größer wird. Für die verwendeten Testobjekte war die Differenz zwischen $u_{\theta,\theta}$ und u_θ relativ gering. Allerdings werden die Rekonstruktionen bei kleinerer Wellenzahl schlechter.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Univ.-Prof. Dr. A.K. Louis für die Vergabe des interessanten Themas bedanken. Weiterhin möchte ich mich bei ihm für die Einführung in die mathematischen Aspekte der Computertomographie und der inversen Probleme, speziell der Röntgen-Computertomographie und der Ultraschalltomographie bedanken. Besonders danken möchte ich Frau Dr. Hellai Abdullah. Ihre stete Hilfsbereitschaft und ihre Hinweise haben sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Weiterhin möchte ich mich bei Peter Jonas und Volker Gebhardt u.a. für die Bereitstellung von Matlab-Routinen bedanken. Ich danke Roman Müller und Peter Dörr für ihre Unterstützung bei der Benutzung der Rechner.

Saarbrücken, im Februar 2001

Symbolverzeichnis

$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen, $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0\}$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
$\mathbb{Z}^n$	Menge der ganzzahligen n-Tupel
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler reeller Zahlenraum
S^{n-1}	n-dimensionale Einheitssphäre
$c(x)$	ortsabhängige Schallgeschwindigkeit
c_0	Schallgeschwindigkeit im Hintergrundmedium
Δ	Laplace-Operator
∇	Gradient
k	Wellenzahl
λ	Wellenlänge
$n(x)$	Brechungsindex
V_A	Objektfunktion, $V_A = 1 - n^2$
V	Potential in der Helmholtz-Gleichung, $(\Delta + k^2)u = Vu$
θ	Richtung der einfallenden ebenen Welle
θ'	Richtung, in der das Fernfeld untersucht wird
ω	Richtung in der Mitte zwischen θ und θ', $\omega = \frac{\theta+\theta'}{\lvert\theta+\theta'\rvert} \in S^{n-1}$
$\omega^\perp$	Teilraum des $\mathbb{R}^n$ senkrecht zu ω, bzw. Vektor senkrecht zu ω
u	Wellenfunktion
u^i	einfallende ebene Welle
u^s	gestreutes Feld
u_θ	Gesamtfeld bei Einfallrichtung θ
u^i_θ	einfallende ebene Welle mit Einfallsrichtung θ
u^s_θ	gestreutes Feld bei Einfallsrichtung θ
$f(k, \theta, \theta')$	Fernfeld
$f_k(\theta, \theta')$	Fernfeld bei fester Wellenzahl k
O, o	Landau-Symbole
J_n	Besselfunktion
$H^{(1)}_n$	Hankelfunktion erster Art
j_n	sphärische Besselfunktion
$h^{(1)}_n$	sphärische Hankelfunktion erster Art

Y_n^m	Kugelflächenfunktionen vom Grad n
P_l	Legendre-Polynom vom Grad l
Ω	Gebiet im $\mathbb{R}^n$
$\overline{\Omega}$	Abschluss von Ω
$\mathrm{supp}(f)$	Träger der Funktion f
$< \cdot, \cdot >$	Standardskalarprodukt im $\mathbb{C}^n$
T	Tangentialbündel der Einheitssphäre
Z	Einheitszylinder, $Z = S^{n-1} \times [-1, 1]$
$\mathcal{F}$	Fouriertransformation
$\mathcal{F}_{\omega^\perp}$	Fouriertransformation in $\omega^\perp$
$\hat{f}$	Fouriertransformation der Funktion f
$\mathcal{F}^{-1},\ \mathcal{F}_{\omega^\perp}^{-1}$	inverse Fouriertransformation
$L_1(\mathbb{R}^n)$, $L_1(T)$	Räume absolut integrierbarer Funktionen
$L_2(\mathbb{R}^n)$	quadratisch integrierbare Funktionen
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \mathcal{S}(T),\ \mathcal{S}(\omega^\perp)$	Schwartzräume
$\Vert \cdot \Vert_\infty$	Supremumnsnorm
$f * g$	Faltung von f und g
D^k	Ableitungsoperator
sinc	sinc-Funktion, $\mathrm{sinc}\,(x) = \frac{\sin(x)}{x},\ \mathrm{sinc}(0) = 1$
$H^\alpha(\mathbb{R}^n),\ H^\alpha(T),\ H^\alpha(\omega^\perp)$	Sobolevräume
$\mathcal{P}$	Röntgentransformation
$\mathbf{R}$	Radon-Transformation
$\mathcal{P}^\#,\ \mathbf{R}^\#$	Rückprojektion
$A_k V$	Eikonalapproximation
$A_{k,2} V$	Eikonalapproximation im 2D-Fall
$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}z = \exp(-\frac{i}{2k}z) - 1,\ z \in \mathbb{C}$
$\mathcal{B}_\gamma$	Tiefpassfilter mit Abschneidefrequenz γ
$B_r(0)$	Kreisscheibe mit Radius r um 0
$s_k,\ s_{k,\omega}$	Sortierfunktionen
$S_k,\ S_{k,\omega}$	Sortieroperatoren
$\Re z$	Realteil der komplexen Zahl z
$\Im z$	Imaginärteil der komplexen Zahl z
P_ω, $P_{\omega^\perp}$	Projektion auf die Unterräume $\mathbb{R}\omega$ bzw. $\omega^\perp$
sup	Supremum
exp	Exponentialfunktion
$\square$	Ende eines Beweises oder eines Satzes

Kapitel 1

Grundlagen und mathematische Modellierung

1.1 Ultraschalltomographie

Ziel der *Ultraschalltomographie* ist es, mit Hilfe von Ultraschallmessungen nichtinvasiv Informationen über das zu untersuchende Objekt zu gewinnen. Man bestrahlt das Objekt dazu mit Ultraschallwellen und misst das durch Wechselwirkung zwischen Objekt und einfallender Welle entstehende gestreute Feld.

In dieser Arbeit wird die Streuung zeitharmonischer akustischer Wellen (vgl. [2], [3], [4],[10]) an einem durchdringlichen inhomogenen Medium untersucht. Dieses Medium ist in ein homogenes Hintergrundmedium eingebettet. Die Ausbreitung von Wellen wird durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t,x) = c^2(x)\Delta U(t,x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^3$$

beschrieben. c ist die ortsabhängige Schallgeschwindigkeit. Im homogenen Hintergrundmedium ist sie konstant c_0. Durch Fouriertransformation (vgl. Abschnitt 1.2) bezüglich der Zeit

$$u(x) := \hat{U}(\omega, x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-i<\omega,t>} U(t,x)\, dt$$

geht diese Gleichung in die Differentialgleichung

$$(\Delta + k^2 n^2(x))u(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^3$$

über, die von der Zeit unabhängig ist. Der *Brechungsindex* n ist definiert als

$$n(x) := \frac{c_0}{c(x)}.$$

Im Hintergrundmedium ist der Brechungsindex konstant 1. Wir betrachten auch den Fall, dass das Medium absorbierend ist, d.h. n habe die Form

$$n^2(x) = n_1(x) + i\frac{n_2(x)}{k}, \; n_1 > 0, \; n_2 \geq 0.$$

Die *Wellenzahl* k ist durch

$$k = \frac{\omega}{c_0} > 0$$

gegeben, und die *Objektfunktion* V_A ist durch

$$V_A := 1 - n^2$$

definiert. Man erhält die (inhomogene) Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2)u = k^2 V_A u, \; \text{im } \mathbb{R}^3. \tag{1.1}$$

Wie man sieht, hängt die rechte Seite in (1.1) von der Wellenzahl k ab. Betrachtet man nicht die Anwendung der Helmholtz-Gleichung in der Ultraschalltomographie, sondern eine Anwendung in der Quantenmechanik, so ist die rechte Seite unabhängig von k. Deshalb werden wir im Folgenden

$$V := k^2 V_A$$

setzen.

Im Folgenden nehmen wir an, dass V kompakten Träger im $\mathbb{R}^3$ hat. Weiterhin kann das Potential V auch absorbierend sein, d.h. der Imaginärteil $\Im V$ von V ist kleiner oder gleich 0. Wir zerlegen u in *einfallendes Feld* u^i und *gestreutes Feld* u^s. u^i wählen wir als *ebene Welle* $u^i(x) = e^{ik<\theta,x>}$, wobei $\theta \in S^2$ die Einfallsrichtung von u^i ist. Um die Abhängigkeit von der *Einfallsrichtung* θ zu betonen, schreiben wir u^i_θ anstatt u^i. u^i_θ erfüllt die *Helmholtz-Gleichung*

$$(\Delta + k^2)u^i_\theta = 0, \; \text{im } \mathbb{R}^3. \tag{1.2}$$

Das bei dieser Messung entstehende gestreute Feld u^s_θ soll die *Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung* erfüllen

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u^s_\theta}{\partial r} - iku^s_\theta\right) = 0.$$

Sie garantiert, dass das gestreute Feld u^s_θ eindeutig durch V und θ bestimmt ist.

Im Folgenden sei Ω ein beschränktes Gebiet mit C^2-stetigem Rand $\partial\Omega$. Mit $\mathcal{R}(\Omega)$ bezeichnen wir den Vektorraum der komplexwertigen Funktionen $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, für die die Normalableitung in dem Sinne existiert, dass

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} < \nu(x), \nabla u(x - h\nu(x)) >, \; x \in \partial\Omega,$$

gleichmäßig auf $\partial\Omega$ gilt. Die Normale ν zeige dabei in Richtung des Äußeren von Ω. Zuerst werden folgende Sätze angegeben.

Satz 1.1 (Greensche Formeln) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-stetigem Rand. Φ sei die Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung*

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}, \; x \neq y.$$

Sei $u \in \mathcal{R}(\Omega)$, dann gilt für $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} u(x) = \quad & \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y) \\ - & \int_{\Omega} \Phi(x,y)(\Delta + k^2)u(y)\, dy. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Analog gilt für Lösungen $u \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ der Helmholtz-Gleichung (1.2) im Äußeren von Ω, die die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung erfüllen,

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \Phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right) ds(y), \; x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}. \tag{1.4}$$

BEWEIS: (vgl. [3], [4], [14]).

□

Das *direkte Streuproblem* besteht darin, eine Funktion $u_\theta \in C^2(\mathbb{R}^3)$ zu suchen, die folgende Forderungen erfüllt:

$$(\Delta + k^2)u_\theta = V u_\theta, \text{ im } \mathbb{R}^3, \tag{1.5}$$

$$u_\theta = u_\theta^i + u_\theta^s, \; u_\theta^i = e^{ik<\theta,x>}, \tag{1.6}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u_\theta^s}{\partial r} - iku_\theta^s\right) = 0. \tag{1.7}$$

Wir nehmen an, dass der Träger von V im beschränkten *Rekonstruktionsgebiet* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ enthalten ist. In den numerischen Beispielen wird $\Omega = B_1(0)$ die Einheitskugel sein. Das *inverse Streuproblem* besteht darin, dass das gestreute Feld u_θ^s auf einer Fläche Γ_θ außerhalb von Ω gemessen wird, und dass das Potential V im Innern von Ω gesucht ist. Man kann das inverse Streuproblem wie folgt formulieren:

- Für alle einfallenden Wellen u_θ^i sei das gestreute Feld $\tilde{u}_\theta^s$ auf einer Mannigfaltigkeit $\Gamma_\theta \subset \mathbb{R}^3$ mit $\Gamma_\theta \cap \overline{\Omega} = \emptyset$ gegeben.

- Gesucht ist eine Funktion V mit kompaktem Träger in Ω, so dass es für alle einfallenden Wellen u_θ^i eine Funktion $u_\theta^s \in C^2(\mathbb{R}^3)$ gibt, so dass V und u_θ^s die Gleichungen (1.5)-(1.7) erfüllen, und dass

  $$\tilde{u}_\theta^s(x) = u_\theta^s(x)$$

  für alle $x \in \Gamma_\theta$ gilt.

Der folgende Satz besagt, dass das direkte Streuproblem äquivalent dazu ist, eine Lösung der *Lippmann-Schwinger-Gleichung* zu suchen.

Satz 1.2 *Sei $u_\theta \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Genau dann ist u_θ eine Lösung von (1.5)-(1.7), wenn u_θ eine Lösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung ist,*

$$u_\theta(x) = u_\theta^i(x) - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} V(y) u_\theta(y)\, dy. \tag{1.8}$$

Für das gestreute Feld gilt damit

$$u_\theta^s(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} V(y) u_\theta(y)\, dy. \tag{1.9}$$

Durch Substitution erhält man

$$u_\theta(x) = u_\theta^i(x) - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|y|}}{|y|} V(x-y) u_\theta(x-y)\, dy. \tag{1.10}$$

BEWEIS: (vgl. [4]).

$\square$

In [4] wird gezeigt, dass für $k > 0$ die Lippmann-Schwinger-Gleichung eindeutig lösbar ist.

Das gestreute Feld u_θ^s hat das asymptotische Verhalten

$$u_\theta^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} f\left(k, \theta, \frac{x}{|x|}\right) + o(|x|^{-1}),\ \ |x| \to \infty.$$

Das *Fernfeld* f kann man in geschlossener Form angeben (vgl. [4]). Schreibt man $x \in \mathbb{R}^3$ und $y \in \mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten, so ergibt eine elementare Rechnung

$$|x-y| = \sqrt{|x|^2 - 2 < x, y > + |y|^2} = |x|\sqrt{1 - 2 < \frac{\hat{x}}{|x|}, y > + \frac{|y|^2}{|x|^2}},$$

wobei $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ und $x \neq 0$ gelten muss. Aus

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + O(|x|^2),\ \ |x| \to 0$$

folgt

$$|x-y| = |x| - < \hat{x}, y > + O(|x|^{-1}),\ \ |x| \to \infty$$

und damit

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left(e^{-ik<\hat{x},y>} + O(|x|^{-1})\right),\ \ |x| \to \infty.$$

Setzt man diese Entwicklung in (1.9) ein, so ergibt sich für u_θ^s die Darstellung

$$u_\theta^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left(-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik<\hat{x},y>}V(y)u_\theta(y)\,dy\right) + o(|x|^{-1}),\ |x| \to \infty,$$

und damit lässt sich das Fernfeld als

$$f\left(k,\theta,\frac{x}{|x|}\right) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik<\frac{x}{|x|},y>}V(y)u_\theta(y)\,dy \tag{1.11}$$

schreiben. Wir werden auch $f_k(\theta,\theta')$ anstatt $f(k,\theta,\theta')$ schreiben, wenn die Wellenzahl k fest ist. Das *inverse Mediumproblem* kann man wie folgt definieren:

- Sei $\mathcal{J}$ eine endliche Indexmenge. Gegeben sei das Fernfeld $f(k,\theta_j,\theta')$ für alle $\theta' \in S^2$ und eine endliche Anzahl von Einfallsrichtungen $\theta_j,\ j \in \mathcal{J}$, der einfallenden ebenen Wellen. Das Fernfeld kann sowohl für eine als auch für mehrere Wellenzahlen bekannt sein.

- Gesucht ist eine Funktion V mit kompaktem Träger, für die es für jede Einfallsrichtung $\theta_j,\ j \in \mathcal{J}$, eine Funktion $u_{\theta_j} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ gibt, so dass (1.8) und (1.11) erfüllt sind.

Es werden nun Eigenschaften des direkten Streuproblems angegeben, die in dieser Arbeit zur Untersuchung des direkten und des inversen Streuproblems benutzt werden.

Da der Träger des Potentials V kompakt ist, erfüllt das gestreute Feld u_θ^s außerhalb einer Kugel mit genügend großem Radius die Helmholtz-Gleichung $(\Delta + k^2)u_\theta^s = 0$. Damit gilt für u_θ^s der folgende Satz:

Satz 1.3 *Sei u_θ^s eine Lösung der Helmholtz-Gleichung (1.2) im Äußeren einer Kugel mit Radius R, die die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung erfüllt. Dann lässt sich u_θ^s nach Kugelflächenfunktionen Y_n^m entwickeln,*

$$u_\theta^s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} i^n b_n^m h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m(\hat{x}),\ \hat{x} = \frac{x}{|x|}. \tag{1.12}$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $|x| > R$. In (1.12) sind $h_n^{(1)}$ die sphärischen Hankelfunktionen erster Art,

$$h_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z),$$

wobei $H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}$ eine Hankelfunktion erster Art ist.

BEWEIS: (vgl. [4]).

□

Satz 1.3 wird dadurch bewiesen, dass man folgendes Additionstheorem in Gleichung (1.4) einsetzt:

Satz 1.4 *Seien Y_n^m, $m = -n, \cdots, n$, $n = 0, 1, \cdots$, eine Menge von paarweise orthonormalen Kugelflächenfunktionen. Dann gilt für $|x| > |y|$*

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = ik \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x}) j_n(k|y|) \overline{Y_n^m(\hat{y})}, \tag{1.13}$$

wobei $\hat{x} = x/|x|$ und $\hat{y} = y/|y|$. Die Reihe und ihre gliedweise Ableitungen nach $|y|$ und $|x|$ konvergieren absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $|x| > |y|$. Dabei sind j_n die sphärischen Besselfunktionen

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z),$$

wobei $J_{n+\frac{1}{2}}$ eine Besselfunktion ist.

BEWEIS: (vgl. [4]).

□

Der zu Satz 1.3 analoge Satz lautet für das Fernfeld

Satz 1.5 *Sei u_θ^s eine Lösung der Helmholtz-Gleichung (1.2) im Äußeren einer genügend großen Kugel mit Radius R. u_θ^s erfülle die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung, und $f_k(\theta, \cdot)$ sei das zugehörige Fernfeld. Dann gilt mit den Koeffizienten b_n^m aus (1.12)*

$$f_k(\theta, \hat{x}) = -\frac{i}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} b_n^m h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x}). \tag{1.14}$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig.

BEWEIS: (vgl. [4]).

□

Mit Hilfe von (1.3) und (1.13) kann man eine Lösung der Helmholtz-Gleichung (1.2) im Innern eines Gebiets Ω, das die Bedingungen aus Satz 1.1 erfüllt, nach Kugelflächenfunktionen entwickeln. Es gilt

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} i^n a_n^m j_n(k|x|) Y_n^m(\hat{x}), \tag{1.15}$$

für $x \in \overline{\Omega}$. Für die Kugelflächenfunktionen gilt folgendes Additionstheorem:

Satz 1.6 (Additionstheorem) *Seien Y_n^m, $m = -n, \ldots, n$ paarweise orthonormale Kugelflächenfunktionen vom Grad n. Dann gilt für alle $\hat{x}$, $\hat{y}$ mit Betrag 1*

$$\sum_{m=-n}^{n} Y_n^m(\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{y})} = \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos\varphi),$$

wobei φ der Winkel zwischen $\hat{x}$ und $\hat{y}$ ist.

BEWEIS: (vgl. [4]).

□

Ist das Potential V radialsymmetrisch, so kann man mit Hilfe einer Substitution (Drehung) direkt aus der Lippmann-Schwinger-Gleichung sehen, dass das Feld u_θ invariant unter Drehungen senkrecht zur Einfallsrichtung θ ist, da u_θ^i invariant unter Drehungen senkrecht zu θ ist. In diesem Fall kann man u_θ^s mit Hilfe von (1.12) und Satz 1.6 im Äußeren einer genügend großen Kugel nach Legendre-Polynomen P_n entwickeln,

$$u_\theta^s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n b_n \frac{2n+1}{4\pi} h_n^{(1)}(k|x|) P_n(\cos\varphi),\ \ \varphi \text{ sei der Winkel zwischen } \hat{x} \text{ und } \theta. \tag{1.16}$$

Für das Fernfeld gilt die Entwicklung

$$f_k(\theta,\theta') = -\frac{i}{k}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} b_n P_n(\cos\varphi),\ \ \varphi \text{ sei der Winkel zwischen } \theta \text{ und } \theta', \tag{1.17}$$

wobei die Koeffizienten b_n in (1.16) und (1.17) identisch sind. Ist u_θ im Innern von Ω Lösung der Helmholtz-Gleichung (1.2) mit Wellenzahl k_1, so gilt die Entwicklung

$$u_\theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n a_n \frac{2n+1}{4\pi} j_n(k_1|x|) P_n(\cos\varphi). \tag{1.18}$$

φ sei der Winkel zwischen $\hat{x}$ und θ und es gelte $x \in \Omega$. Weiterhin kann man das einfallende Feld u_θ^i nach Legendre-Polynomen entwickeln. Es gilt die *Jacobi-Anger-Entwicklung* (vgl. [4])

$$e^{ik<\theta,x>} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(k|x|) P_n(\cos\varphi),\ \ x \in \mathbb{R}^3, \tag{1.19}$$

wobei φ der Winkel zwischen x und der Einfallsrichtung θ ist.

Sei das Objekt V_A ein Zylinder mit Radius a und konstantem Funktionswert f im Innern des Zylinders. Weiterhin nehmen wir an, dass das Nahfeld u_θ konstant in Richtung der Drehachse des Zylinders ist. In diesem Fall kann man das direkte Streuproblem als ein zweidimensionales Problem darstellen. Sei k_2 die Wellenzahl der einfallenden Welle. u_θ erfülle die (inhomogene) Helmholtz-Gleichung

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x_2^2} + k_2^2 u_\theta = k_2^2 V_A u_\theta. \tag{1.20}$$

Aus (1.20) sieht man, dass u_θ im Innern des Zylinders Lösung der Helmholtz-Gleichung mit Wellenzahl $k_1 = k_2\sqrt{1-f}$ ist,

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x_2^2} + k_1^2 u_\theta = 0.$$

Die den Gleichungen (1.16), (1.18) und (1.19) im zweidimensionalen Fall entsprechenden Entwicklungen lauten (vgl. [2], [14])

$$u_\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i^n a_n J_n(k_1|x|) Y_n(x/|x|)\overline{Y_n(\theta)}, \text{ für } x \text{ im Innern von } V_A \tag{1.21}$$

und

$$u^s_\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i^n b_n H^{(1)}_n(k_2|x|) Y_n(x/|x|)\overline{Y_n(\theta)}, \text{ für } x \text{ außerhalb von } V_A \tag{1.22}$$

und

$$e^{ik_2<\theta,x>} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i^n J_n(k_2|x|) Y_n(x/|x|)\overline{Y_n(\theta)}, \; x \in \mathbb{R}^2. \tag{1.23}$$

In [2] und [14] wird mit Hilfe der Entwicklungen (1.21), (1.22) und (1.23) eine geschlossene Formel für das Nahfeld angegeben, wenn das Objekt V_A ein Zylinder ist. Man kann das Nahfeld im Innern von V_A durch Gleichung (1.21), und das Nahfeld im Äußeren von V_A mit Hilfe der Gleichungen (1.22) und (1.23) darstellen. Fordert man, dass sich beide Entwicklungen am Rand von V_A zu einer stetig differenzierbaren Funktion zusammenfügen, so erhält man durch Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten a_n und b_n. Die Lösung lautet

$$b_n = \frac{k_2 J_n(k_1 a) J_n'(k_2 a) - k_1 J_n(k_2 a) J_n'(k_1 a)}{k_1 H^{(1)}_n(k_2 a) J_n'(k_1 a) - k_2 J_n(k_1 a) H^{(1)'}_n(k_2 a)},$$

und

$$a_n = \frac{J_n(k_2 a) + b_n H^{(1)}_n(k_2 a)}{J_n(k_1 a)}.$$

Exakt die gleiche Vorgehensweise liefert im dreidimensionalen Fall unter der Annahme, dass V_A eine Kugel mit Radius a ist, die Koeffizienten in (1.16) und (1.18),

$$b_n = 4\pi \frac{k j_n(k_1 a) j_n'(ka) - k_1 j_n(ka) j_n'(k_1 a)}{k_1 h^{(1)}_n(ka) j_n'(k_1 a) - k_2 j_n(k_1 a) h^{(1)'}_n(ka)},$$

und

$$a_n = \frac{4\pi j_n(ka) + b_n h^{(1)}_n(ka)}{j_n(k_1 a)}.$$

1.2 Die Fouriertransformation

Eine Integraltransformation, die in dieser Arbeit sowohl als Objekt der Untersuchung, als auch als mathematisches Hilfsmittel eine wichtige Rolle spielen wird, ist die *Fouriertransformation*, (vgl. [10], [11], [18]). Sie ist für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} f(x)\, dx$$

definiert. Die *inverse Fouriertransformation* lautet

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} \hat{f}(\xi)\, d\xi. \tag{1.24}$$

Es ist sinnvoll, die Fouriertransformation auf den *Schwartzraum* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ einzuschränken, da sie auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ einige schöne Eigenschaften hat, und die entsprechenden Beweise für Funktionen aus dem Schwartzraum relativ einfach zu führen sind. Später wird die Fouriertransformation wieder stetig auf $L_1(\mathbb{R}^n)$ bzw. auf $L_2(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden.

Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der schnell fallenden Funktionen ist hierbei definiert als der Untervektorraum der C^∞-Funktionen f, für die

$$|f|_{k,l} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^k D^l f(x) \right| < \infty$$

für alle $k = (k_1, \ldots, k_n),\ l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ gilt.
Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt (siehe [18])

$$\mathcal{F}\mathcal{F}f(x) = f(-x). \tag{1.25}$$

Daraus lässt sich die *Fourierinversionsformel*

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x) = f(x),\ \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi),$$

folgern, wodurch die Bezeichnung inverse Fouriertransformation gerechtfertigt ist. Wir erwähnen nun einige Eigenschaften der Fouriertransformation, die im Laufe dieser Arbeit nützlich sein werden. Zuerst definieren wir die *Faltung* zweier Funktionen $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy.$$

Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ gilt

$$\mathcal{F}(D^k f) = i^{|k|}\xi^k \mathcal{F}f, \quad \mathcal{F}(x^k f) = i^{|k|} D^k \mathcal{F}f,$$

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}f\mathcal{F}g, \quad \mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}f * \mathcal{F}g \text{ (Faltungssatz)},$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g\, dx. \tag{1.26}$$

Aus (1.26) sieht man mit $\overline{\mathcal{F}f} = \mathcal{F}^{-1}\bar{f}$, dass die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Isometrie bzgl. der L_2-Norm ist. Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in L_2 liegt, kann man $\mathcal{F}$ zu einem stetigen Operator (den wir wieder $\mathcal{F}$ nennen) nach L_2 fortsetzen, wobei $\mathcal{F}f$ gegeben ist durch

$$\mathcal{F}f(\xi) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|x|\le r} e^{-i<x,\xi>} f(x)\, dx.$$

Der Grenzwert ist hierbei im L_2-Sinne zu verstehen.

Um die inverse Fouriertransformation einer Funktion $\hat{f}$ numerisch zu berechnen, muss man das Integral (1.24) diskretisieren. Wir nehmen dabei an, dass f $2k$-bandbeschränkt ist. Eine Funktion f heisst *b-bandbeschränkt*, wenn $\hat{f}(\xi) = 0$ für $|\xi| \geq b$ gilt. f heisst *wesentlich b-bandbeschränkt*, wenn $\hat{f}$ außerhalb der Kugel mit Radius b in einem geeigneten Sinne klein ist. Im Folgenden werden wir Indizes j, l immer als Multiindizes $j = (j_1, \cdots j_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $l = (l_1, \cdots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$ verstehen. Wir wenden die Trapezregel mit Schrittweite $\frac{2k}{q}$ in jeder Koordinatenrichtung auf (1.24) an. Die Näherung, die wir dadurch erhalten, bezeichnen wir mit f_j,

$$f_j \approx f(x_j),\ j_1, \cdots j_n = -q, \cdots, q-1.$$

x_j ist durch

$$x_j = \left(\frac{\pi}{2k} j_1, \cdots, \frac{\pi}{2k} j_n\right)^T$$

gegeben. Um die Notation zu vereinfachen, definieren wir

$$\hat{f}_l := \left(\frac{2k}{q\sqrt{2\pi}}\right)^n \hat{f}(\xi_l),\ l_1, \cdots l_n = -q, \cdots, q,$$

mit

$$\xi_l = \left(\frac{2k}{q} l_1, \cdots, \frac{2k}{q} l_n\right)^T.$$

Sind die Randterme $\hat{f}_{-q}$ und $\hat{f}_q$ in jeder Komponente gleich, so kann man die Randterme, die in der Trapezregel jeweils mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gewichtet werden, zusammenfassen und von $-q$ bis $q-1$ summieren. Man erhält

$$f_j = \sum_{l_1, \cdots, l_n = -q}^{q-1} \hat{f}_l e^{i < x_j, \frac{2kl}{q} >},\ j_1 \cdots j_n = -q, \cdots, q-1.$$

Setzt man $x_j = \frac{\pi j}{2k}$ ein, so ergibt sich eine *diskrete inverse Fouriertransformation* (DIFT) (vgl. [6], [7])

$$f_j = \sum_{l_1, \cdots, l_n = -q}^{q-1} \hat{f}_l e^{i\pi < j, l > / q}, \quad j_1, \cdots, j_n = -q, \cdots, q-1. \tag{1.27}$$

Sie wird durch die *diskrete Fouriertransformation* (DFT)

$$\hat{f}_l = \frac{1}{(2q)^n} \sum_{j_1, \cdots, j_n = -q}^{q-1} f_j e^{-i\pi < j, l > / q}, \quad l_1, \cdots, l_n = -q, \cdots, q-1$$

invertiert. Zur Berechnung von (1.27) benötigt man $O(q^{2n})$ Operationen. Ist q eine Zweierpotenz, so kann man dies mit Hilfe einer *schnellen inversen Fouriertransformation* (IFFT) auf $O(q^n \log q)$ Operationen reduzieren. Eine eindimensionale schnelle inverse Fouriertransformation benötigt $O(q \log q)$ Operationen. Wir werden nur ein- bzw. zweidimensionale inverse Fouriertransformationen verwenden. Deshalb soll die Zurückführung einer zweidimensionalen DIFT auf eindimensionale IFFT's erläutert werden. (Die Zurückführung einer zweidimensionalen DFT auf *schnelle Fouriertransformationen* (FFT's) lässt sich analog durchführen).

$$\begin{aligned} f_{l_1,l_2} &= \sum_{j_1,j_2=-q}^{q-1} \hat{f}_{j_1,j_2} e^{i\pi(j_1 l_1 + j_2 l_2)/q} \\ &= \sum_{j_1=-q}^{q-1} \underbrace{\left(\sum_{j_2=-q}^{q-1} \hat{f}_{j_1,j_2} e^{i\pi j_2 l_2/q} \right)}_{=:\hat{h}_{j_1,l_2}} e^{i\pi j_1 l_1/q}, \ l_1, l_2 = -q, \cdots, q-1. \end{aligned}$$

Betrachtet man j_1 als konstanten Parameter, so benötigt die Auswertung der inneren Klammer mit Hilfe einer IFFT $O(q \log q)$ Operationen. Man muss dies für $2q$ verschiedene Werte von j_1 durchführen. Schließlich muss man noch die Summen

$$f_{l_1,l_2} = \sum_{j_1=-q}^{q-1} \hat{h}_{j_1,l_2} e^{i\pi j_1 l_1/q}, \ l_1, l_2 = -q, \cdots, q-1$$

auswerten, wobei diesmal bei jeder Auswertung der Summe l_2 ein fester Parameter ist. Man benötigt dazu noch einmal $2q$ IFFT's. Insgesamt kann man eine zweidimensionale DIFT der Länge $2q \times 2q$ auf $4q$ eindimensionale IFFT's der Länge $2q$ zurückführen. Dazu benötigt man $O(q^2 \log q)$ Operationen.

Es werden noch Sätze über bandbeschränkte Funktionen und eine Darstellung des Fehlers angegeben, der entsteht, wenn man eine Fouriertransformation durch eine diskrete Fouriertransformation annähert. Es gelten folgende Sätze:

Satz 1.7 (sinc-Reihe) *Sei f b-bandbeschränkt, und sei $h \leq \frac{\pi}{b}$. Dann ist f eindeutig durch die Werte $f(hk)$, $k \in \mathbb{Z}^n$ bestimmt. Im L_2-Sinn gelten folgende Reihendarstellungen*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(x - hk)\right), \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.28}$$

und

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) e^{-ih<\xi,k>}, \ \xi \in [-\pi/h, \pi/h]^n.$$

Die sinc-Funktion ist für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

definiert. Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\operatorname{sinc}(x)$ *durch*

$$\operatorname{sinc}(x) = \operatorname{sinc}(x_1) \ldots \operatorname{sinc}(x_n)$$

definiert.

BEWEIS: (vgl. [11]).

$\square$

Satz 1.7 besagt, dass eine b-bandbeschränkte Funktion bereits durch ihre Funktionswerte auf einem kartesischen Gitter eindeutig bestimmt ist, falls die Schrittweite h innerhalb des Gitters kleiner oder gleich $\frac{\pi}{b}$ ist. Weiterhin ist die diskrete Fouriertransformation exakt, falls die Schrittweite h kleiner oder gleich $\frac{\pi}{b}$ ist. Formel (1.28) kann man z.B. dazu benutzen, eine b-bandbeschränkte Funktion zu interpolieren. Wie man Entwicklungen erhalten kann, die schneller konvergieren als (1.28), wird in folgendem Satz beschrieben.

Satz 1.8 *Sei f b-bandbeschränkt, und sei $h < b$. Sei $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. γ verschwinde für $|x| \geq 1$ und es gelte $\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x)\, dx = (2\pi)^{-n/2}$. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) \tilde{\gamma} \left[\left(\frac{\pi}{h} - b \right) (x - hk) \right] \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{h} (x - hk) \right), \ x \in \mathbb{R}^n, \qquad (1.29)$$

wobei $\tilde{\gamma}$ die inverse Fouriertransformation von γ ist.

BEWEIS: (vgl. [11]).

$\square$

Folgender Satz beschreibt den Fehler, der entsteht, wenn man die Fouriertransformation einer (nicht notwendigerweise bandbeschränkten) Funktion f durch eine diskrete Fouriertransformation mit Schrittweite h annähert.

Satz 1.9 *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für die Fouriertransformation*

$$\hat{f}(\xi) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) e^{-ih<\xi,k>} = -\sum_{l \neq 0} \hat{f} \left(\xi - \frac{2\pi}{h} l \right). \qquad (1.30)$$

Analog gilt unter Berücksichtigung von (1.25) für die inverse Fouriertransformation

$$f(x) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(hk) e^{ih<x,k>} = -\sum_{l \neq 0} f \left(x - \frac{2\pi}{h} l \right). \qquad (1.31)$$

BEWEIS: (vgl. [11]).

$\square$

Mit Hilfe der Fouriertransformation werden wir nun Räume definieren, die unter Anderem für die Untersuchung der Schlechtgestelltheit inverser Probleme von Nutzen sind (vgl. [11]).

Definition 1.10 *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Der* Sobolevraum H^α *ist definiert durch*

$$H^\alpha(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \quad (1+|\xi|^2)^{\alpha/2} \hat{f} \in L_2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

$H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ *wird mit dem Skalarprodukt*

$$< f, g >_{H^\alpha} := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^\alpha \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}}(\xi)\, d\xi$$

und zugehöriger Norm

$$\|f\|_{H^\alpha} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^\alpha |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2}$$

zu einem Hilbertraum.

□

Schließlich wird noch der *Sobolev'sche Einbettungssatz* angegeben.

Satz 1.11 (Sobolev'scher Einbettungssatz) *Seien $\alpha, k \in \mathbb{N}$ und es gelte $\alpha > k + n/2$. Ist $f \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, so existiert eine k-mal stetig differenzierbare Funktion, die mit f fast überall übereinstimmt (d.h. bis auf eine Nullmenge).*

BEWEIS: (vgl. [18]).

□

1.3 Die Röntgentransformation

1.3.1 Definition und Eigenschaften

Eine weitere Integraltransformation, die eine wichtige Rolle in dieser Arbeit spielen wird, ist die *Röntgentransformation* $\mathcal{P}$ (vgl. [11]). Die Röntgentransformation liefert das mathematische Modell für die 3D-Computertomographie. In dieser Arbeit wird sie in einem anderen Kontext auftauchen. Die Röntgentransformation bildet eine Funktion $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf ihre Linienintegrale ab. $\mathcal{P}V$ ist definiert auf dem Tangentialbündel $T = \left\{ (\omega, b), \omega \in S^{n-1}, b \in \omega^\perp \right\}$ der Einheitssphäre S^{n-1} durch

$$\mathcal{P}V(\omega, b) := \int_{\mathbb{R}} V(b + t\omega)\, dt.$$

Wir werden nun einige Eigenschaften der Röntgentransformation erläutern, die in späteren Kapiteln gebraucht werden. Zuerst definieren wir die Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\omega^\perp}$ für Funktionen $W \in L_1(T)$ durch

$$\mathcal{F}_{\omega^\perp} W(\xi) := (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\omega^\perp} e^{-i<\xi, b>} W(b)\, db, \ \xi \in \omega^\perp.$$

Ist ω variabel, so schreibt man für $\mathcal{F}_{\omega^\perp}W(\xi)$ auch $\hat{W}(\omega,\xi)$. In diesem Fall schreiben wir auch $\mathcal{F}$, um anzudeuten, dass sowohl der Parameter ω, als auch die eigentliche Veränderliche ξ variabel sind, $\mathcal{F}W$ ist also eine Funktion mit Definitionsbereich T. Ein Satz, der eine Beziehung zwischen Röntgentransformation und Fouriertransformation herstellt, ist der *Projektionssatz.*

Satz 1.12 (Projektionssatz) *Für $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:*

$$\widehat{\mathcal{P}V}(\omega,\eta) = \sqrt{2\pi}\hat{V}(\eta),\ \ \eta \in \omega^\perp.$$

Da $\mathcal{P}V$ auf dem Tangentialbündel T definiert ist, wird die Fouriertransformation auf der linken Seite bezüglich des zweiten Arguments (also in $\omega^\perp$) durchgeführt. Die Fouriertransformation auf der rechten Seite wird im $\mathbb{R}^n$ durchgeführt.

BEWEIS: (siehe [10], [11]).

$\square$

Der zu $\mathcal{P}$ duale Operator $\mathcal{P}^\#$ ist durch die Forderung

$$\int_{S^{n-1}}\int_{\omega^\perp}\mathcal{P}f(\omega,b)g(\omega,b)\,db\,d\omega \overset{!}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{P}^\# g(x)\,dx,\ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ g \in \mathcal{S}(T)$$

definiert (vgl. [11]). Durch Einsetzen der Definition von $\mathcal{P}$ erhält man

$$\int_{S^{n-1}}\int_{\omega^\perp}\mathcal{P}f(\omega,b)g(\omega,b)\,db\,d\omega = \int_{S^{n-1}}\int_{\omega^\perp}\int_{\mathbb{R}} f(b+t\omega)\,dt\,g(\omega,b)\,db\,d\omega.$$

Nun setzen wir $y = b + t\omega$, $b \in \omega^\perp$. Es gilt $b = y - t\omega = y- < y,\omega > \omega$, und $dy = dt\,db$. Damit ergibt sich mit Hilfe von Fubini

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}}\int_{\omega^\perp}\mathcal{P}f(\omega,b)g(\omega,b)\,db\,d\omega &= \int_{S^{n-1}}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(\omega,y-<y,\omega>\omega)\,dy\,d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\int_{S^{n-1}} g(\omega,y-<y,\omega>\omega)\,d\omega\right)dy,\end{aligned}$$

wobei die Vertauschung der Integrationsreihenfolge wegen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(T)$ erlaubt ist. Damit erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^\# g(y) &= \int_{S^{n-1}} g(\omega,\underbrace{y-<y,\omega>\omega}_{=:P_{\omega^\perp}y})\,d\omega \\ &= \int_{S^{n-1}} g(\omega,P_{\omega^\perp}y)\,d\omega.\end{aligned}$$

$P_{\omega^\perp}y$ ist die Orthogonalprojektion von y auf $\omega^\perp$. Der Operator $\mathcal{P}^\#$ heisst *Rückprojektion* (vgl. [11]). Sind f und g Funktionen, die auf dem Tangentialbündel T definiert sind, so wird die Faltung $f * g$ für jedes $\omega \in S^{n-1}$ bzgl. der zweiten Variable auf $\omega^\perp$ durchgeführt. Es gilt der folgende Satz

Satz 1.13 *Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(T)$ gilt*

$$(\mathcal{P}^{\#} g) * f = \mathcal{P}^{\#}(g * \mathcal{P} f). \tag{1.32}$$

BEWEIS: (siehe [11]).

□

Man kann auch im Tangentialbündel T Sobolevräume definieren (vgl. [11]).

Definition 1.14 *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. g sei eine auf T definierte Funktion, für die*

$$\|g(\omega,\cdot)\|^2_{H^\alpha(\omega^\perp)} := \int_{\omega^\perp} (1+|\xi|^2)^\alpha |\hat{g}(\omega,\xi)|^2 \, d\xi$$

für alle $\omega \in S^{n-1}$ existiert. Die Sobolevnorm $\|g\|_{H^\alpha(T)}$ sei durch

$$\|g\|^2_{H^\alpha(T)} := \int_{S^{n-1}} \|g(\omega,\cdot)\|^2_{H^\alpha(\omega^\perp)} \, d\omega$$

definiert. Der Sobolevraum $H^\alpha(T)$ bestehe aus den Funktionen g, für die die Norm $\|g\|_{H^\alpha(T)} < \infty$ gilt.

□

Die Röntgentransformation ist stetig als Abbildung von $H^\alpha(B_1(0))$ nach $H^{\alpha+1/2}(T)$, es gilt also $\|\mathcal{P}V\|_{H^{\alpha+1/2}(T)} \le C\|V\|_{H^\alpha(B_1(0))}$ mit einer Konstanten $C > 0$ (vgl. [11]). Ist V radialsymmetrisch, so gilt deshalb

$$\|\mathcal{P}V(\omega,\cdot)\|_{H^{\alpha+1/2}(\omega^\perp)} \le \frac{C}{|S^{n-1}|}\|V\|_{H^\alpha(B_1(0))}, \text{ für alle } \omega \in S^{n-1}. \tag{1.33}$$

1.3.2 Inversionsformeln und Rekonstruktionsalgorithmen

Die Inversion der Röntgentransformation wird ein wesentlicher Teil des Ansatzes zur Lösung des inversen Streuproblems sein, der in dieser Arbeit untersucht werden wird. Deshalb ist die Kenntnis von Formeln zur Inversion der Röntgentransformation und von daraus abgeleiteten Rekonstruktionsalgorithmen, bzw. geeigneten Modifikationen dieser Inversionsformeln notwendig. Durch Diskretisierung der in (1.32) auftretenden Integrale kann man einen Algorithmus zur Inversion der Röntgentransformation herleiten. Dieser Algorithmus wird die Werte $\mathcal{P}V(\omega_j, b_l)$ an geeigneten Stellen $(\omega_j, b_l) \in T$ benötigen. Dabei müssen diese Stellen (ω_j, b_l) das Tangentialbündel T genügend "dicht" abdecken, damit die in (1.32) auftretenden Integrale approximiert werden. In der Praxis kann es vorkommen, dass man die Daten, die man zur Inversion benötigt, nicht messen kann. Speziell in der 3D-Computertomographie kann es auch sein, dass eine solche Messung zu aufwendig wäre. So kann es vorkommen, dass die Röntgenquelle nicht vollständig um das Objekt herumfahren kann (restricted range). Oder der Patient besitzt ein künstliches Hüftgelenk, das nicht für Röntgenstrahlen durchlässig ist. In diesen Fällen muss man spezielle Inversionsformeln herleiten, die an die jeweilige Messapparatur angepasst sind.

Da in dieser Arbeit nicht die 3D-Computertomographie, sondern ein Ansatz zur Lösung des inversen Streuproblems untersucht werden wird, treten einige Einschränkungen, die in der 3D-Computertomographie auftreten, hier nicht auf. Andere Einschränkungen treten jedoch durch die Kombination mehrerer Operatoren, die nacheinander invertiert werden müssen auf. Das soll in diesem Abschnitt aber nicht weiter untersucht werden. Wir werden nun eine dieser Inversionsformeln vorstellen.

Zuerst definieren wir für $\alpha < n$ das *Riesz-Potential* (vgl. [11]) durch

$$\widehat{(I^\alpha f)}(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \hat{f}(\xi),$$

bzw.

$$(I^\alpha \widehat{g(\omega, \cdot)})(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \hat{g}(\omega, \xi),$$

falls g eine Funktion in T ist.

Satz 1.15 (Inversionsformel) *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $\alpha < n$*

$$f = \frac{1}{|S^{n-2}|}(2\pi)^{-1} I^{-\alpha} P^{\#} I^{\alpha-1} g,\; g = \mathcal{P} f.$$

$|S^{n-2}|$ ist dabei das Volumen der $n-2$-dimensionalen Einheitssphäre, z.B. gilt $|S^0| = 2$, $|S^1| = 2\pi$ und $|S^2| = 4\pi$. Setzt man $\alpha = 0$ so erhält man

$$f = \frac{1}{|S^{n-2}|}(2\pi)^{-1} P^{\#} I^{-1} g,\; g = \mathcal{P} f.$$

BEWEIS: (vgl. [11]).

□

In Kapitel 3 wird zur Bestimmung des Potentials V aus der Eikonalapproximation $A_k V$ bzw. zur Bestimmung von V aus dem Nahfeld, das entsteht, wenn man V mit ebenen Wellen bestrahlt, ein zweidimensionales Problem betrachtet werden. Das Problem wird darin bestehen, dass man Approximationen an die Linienintegrale von V, die in einer zweidimensionalen Ebene liegen, gegeben hat, und dass man V bestimmen will. Das Problem, eine in der (zweidimensionalen) Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ definierte Funktion f aus ihren Linienintegralen zu bestimmen, wird durch die *Radontransformation* $\mathbf{R}$ beschrieben (vgl. [10],[11]). Der Einheitszylinder Z sei durch

$$Z = S^{n-1} \times [-1, 1]$$

definiert. Sei $B_1(0)$ die n-dimensionale Einheitskugel. Die Radon-Transformation bildet eine Funktion $f \in \mathcal{S}(B_1(0))$ auf ihre Integrale über Hyperebenen ab,

$$\mathbf{R} f(\omega, s) = \int_{<x,\omega>=s} f(x)\, dx.$$

Im zweidimensionalen Fall ordnet die Radon-Transformation einer Funktion f ihre Linienintegrale zu, sie stimmt also im Wesentlichen mit der Röntgentransformation überein. Der zu $\mathbf{R}$ adjungierte Operator ist durch

$$\mathbf{R}^{\#}g(x) = \int_{S^{n-1}} g(\omega, < x, \omega >)\, d\omega$$

definiert. Für Funktionen f und g, die auf Z definiert sind, werde die Faltung für jedes $\omega \in S^{n-1}$ bzgl. der zweiten Variable in $[-1, 1]$ durchgeführt. Der Satz 1.13 entsprechende Satz lautet für die Radontransformation:

Satz 1.16 *Seien $e \in \mathcal{S}(Z)$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$(\mathbf{R}^{\#}e) * f = \mathbf{R}^{\#}(e * \mathbf{R}f). \tag{1.34}$$

BEWEIS: (vgl. [10],[11]).

□

Faltet man also die Radon-Transformation $\mathbf{R}f$ mit einer Funktion e, und wendet man dann die Rückprojektion $\mathbf{R}^{\#}$ an, so erhält man die Faltung von f mit $\mathbf{R}^{\#}e$. Approximiert $\mathbf{R}^{\#}e$ die Delta-Distribution δ_x im Punkt x, so erhält man dadurch eine Approximation an $f(x)$. Sucht man eine Funktion e, die $\mathbf{R}^{\#}e = E$ mit einem vorgegebenen Filter E erfüllt, so kann man e unabhängig von den gemessenen Daten vorberechnen. Ist E radialsymmetrisch, so ist $e(\omega, s)$ unabhängig von der "Richtung" ω, und man kann $e(\omega, s) := e(\omega_0, s)$ mit einem beliebigen $\omega_0 \in S^{n-1}$ setzen. Da gerade die hochfrequenten Anteile von f nur stark fehlerbehaftet rekonstruiert werden können, wird man E so wählen, dass $E = \mathbf{R}^{\#}e$ ein Tiefpassfilter ist. Die niederfrequenten Anteile von f lassen sich dann mit Hilfe von Formel (1.34) stabil bestimmen. Auf der rechten Seite von (1.34) wird die Faltung durch die Trapezregel und die Rückprojektion durch eine Quadraturformel der Form

$$\int_{S^{n-1}} \omega(\theta)\, d\theta \approx \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \omega(\theta_j) \tag{1.35}$$

approximiert. Dadurch erhält man das Verfahren der *gefilterten Rückprojektion* (vgl. [10],[11]), das in Kapitel 3 eine Rolle spielen wird. Im zweidimensionalen Fall lautet es:

Seien

$$s_l = \frac{l}{q},\ -q \le l \le q,\ \omega_j = \omega\left(\frac{\pi j}{p}\right) := \begin{pmatrix} \cos(\pi j/p) \\ \sin(\pi j/p) \end{pmatrix},\ j = 0, \cdots, p-1.$$

Der vorberechnete Filter e sei an den Stellen s_l gegeben und die Radontransformation $\mathbf{R}f$ sei in der *parallelen Geometrie*, d.h. an den Stellen $(\omega_j, s_l) \in Z$ gegeben.

1. Berechne für $j = 0, \cdots, p-1$ die diskreten Faltungen
$$\psi_{j,k} = \frac{1}{q} \sum_{l=-q}^{q} e_\gamma(s_k - s_l)\mathbf{R}f(\omega_j, s_l), \; k = -q, \cdots, q. \tag{1.36}$$

2. Berechne nun für jeden Rekonstruktionspunkt x die diskrete Rückprojektion f_{FBI},
$$f_{FBI}(x) = \frac{2\pi}{p} \sum_{j=0}^{p-1} ((1-\eta)\psi_{j,k} + \eta\psi_{j,k+1}). \tag{1.37}$$
k und η sind so bestimmt, dass
$$s =< x, \omega_j >, \; k \leq sq < k+1 \text{ und } \eta = sq - k$$
gilt.

$\square$

Die Interpolation in (1.37) dient dazu, die Laufzeit des Algorithmus wesentlich zu verbessern. In [11] wird der Fehler beschrieben, der durch die Diskretisierung der Faltung (1.36) und der Rückprojektion (1.37) entsteht. Da die Radon-Transformation im zweidimensionalen Fall im Wesentlichen mit der Röntgentransformation übereinstimmt, werden die Sätze, die in [11] diesen Fehler beschreiben, an den zweidimensionalen Fall angepasst. In Abhängigkeit von der Abschneidefrequenz b sei $E = E_b$ die inverse Fouriertransformation von $\hat{E}_b$,
$$\hat{E}_b(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \hat{\Psi}\left(\frac{|\xi|}{b}\right),$$
wobei $0 \leq \hat{\Psi} \leq 1$ und $\hat{\Psi}(\sigma) = 0$ für $\sigma \geq 1$ gelte. Mit H'_{2m} seien die geraden Kugelflächenfunktionen vom Grad $\leq 2m$ bezeichnet. Eine Größe bezeichnen wir mit $\eta(\vartheta, m)$, wenn sie mit wachsendem m Exponentiell fällt, d.h. es gelte
$$0 \leq \eta(\vartheta, m) \leq Ce^{-\lambda m}, \; 0 < \vartheta < 1,$$
für $m \geq M$ mit positiven, von ϑ abhängigen Konstanten M, C und λ. f_{FB} sei die Funktion, die man erhält, wenn man im Verfahren der gefilterten Rückprojektion den Interpolationsschritt weglässt.

Satz 1.17 *Sei $f \in C_0^\infty(B_1(0))$. Die Quadraturformel (1.35) sei für die Kugelflächenfunktionen in H'_{2m} gültig, und es gelte*
$$b \leq \vartheta m, \; b \leq \pi q$$
für ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$. Dann gilt
$$f_{FB} = E_b * f + e_1 + e_2.$$

e_1 sei der Fehler, der durch die Diskretisierung der Faltung entsteht, und e_2 sei der Fehler, der durch die Diskretisierung der Rückprojektion entsteht. Es gelten die Abschätzungen

$$|e_1| \leq \frac{1}{2} \sup_{\theta \in S^1} \int_{|\sigma| \geq b} |\sigma \hat{f}(\sigma\theta)| \, d\sigma,$$

und

$$|e_2| \leq \|f\|_{L_\infty(B_1(0))} \eta(\vartheta, m).$$

BEWEIS: (vgl. [11], Satz V.1.1, Spezialfall $n = 2$).

□

Die Interpolation, die nach der Faltung und vor der Rückprojektion angewandt wird, bezeichnen wir mit I,

$$Ig(s) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g(l/q)(\chi * \chi)(sq - l).$$

χ ist durch

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & : \quad -1/2 \leq t < 1/2 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Im nächsten Satz (vgl. [11]) wird nur die Interpolation untersucht, d.h. wir betrachten den Ausdruck $\mathbf{R}^{\#} I(e * \mathbf{R}f)$.

Satz 1.18 *Für $b \leq \pi q$ gilt*

$$\mathbf{R}^{\#} I(e * \mathbf{R}f) = G * E_b * f + e_3.$$

Der Filter G ist durch

$$\hat{G}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \left(sinc\left(\frac{|\xi|}{2q}\right)\right)^2 & : \quad |\xi| \leq \pi q \\ 0 & : \quad sonst \end{cases}$$

gegeben. Für den Fehler e_3 gilt $\hat{e}_3(\xi) = 0$, falls $|\xi| \leq \pi q$ ist, und es gilt die Abschätzung

$$\|e_3\|_{L_2(B_1(0))} \leq \frac{2\|f\|_{H_0^\alpha(B_1(0))}}{\pi q^\alpha},$$

für $\alpha \geq 0$.

BEWEIS: (vgl. [11], Satz V.1.2, Spezialfall $n = 2$).

□

Fasst man die letzten beiden Sätze kurz zusammen, so erhält man, dass das Verfahren der gefilterten Rückprojektion eine (wesentlich b-bandbeschränkte) Funktion f "gut" aus $\mathbf{R}f$ rekonstruiert, wenn die Schrittweiten in der diskreten Rückprojektion und der diskreten Faltung "klein" genug sind. Den Interpolationsschritt kann man (abgesehen vom hochfrequenten Fehler e_3) als zusätzliche Faltung mit dem Tiefpassfilter G betrachten.

Kapitel 2

Die Eikonalapproximation

2.1 Herleitung der Eikonalapproximation

In [9] wurde die Eikonalapproximation hergeleitet und beschrieben, wie sie zur Lösung des inversen Streuproblems genutzt werden kann. Will man das direkte Streuproblem lösen, so hat man entweder eine lineare partielle Differentialgleichung, die *Helmholtz-Gleichung* (1.1), oder eine Integralgleichung, die *Lippmann-Schwinger-Gleichung* (1.10) zu lösen. Die Eikonalapproximation A_k liefert eine Approximation an das Fernfeld f_k. Sie wurde ursprünglich entwickelt, um bei gegebenem Potential V das zur Lösung der Helmholtz-Gleichung u_θ gehörige Fernfeld $f(k, \theta, \cdot)$ direkt berechnen zu können, also ohne Differential- oder Integralgleichungen lösen zu müssen. Die Eikonalapproximation lässt sich in bekannte invertierbare Operatoren, in Röntgentransformation, Fouriertransformation und eine nichtlineare, punktweise auf Funktionen wirkende Exponentialfunktion $\mathcal{E}$ zerlegen. Dies führt dazu, dass die Auswertung der Eikonalapproximation im Wesentlichen nur die Berechnung von Integralen erfordert. Ist dies nicht analytisch exakt möglich, so lässt sich dies mit vergleichsweise geringem Aufwand numerisch durchführen.

Betrachtet man das inverse Streuproblem, so werden die oben genannten Gleichungen nichtlinear, da sowohl das in ihnen auftretende Feld u im Innern des Trägers des Potentials V, als auch das gesuchte Potential V unbekannt sind. Da die Eikonalapproximation sich in invertierbare Operatoren zerlegen lässt, ist es prinzipiell möglich, sie zur Lösung des inversen Streuproblems zu verwenden, und sich dadurch das Lösen einer nichtlinearen Integralgleichung zu "ersparen". Wir werden nun Herleitung und einige Eigenschaften der Eikonalapproximation darstellen. Im Wesentlichen werden wir uns dabei an die Vorgehensweise in [9] halten.

2.1.1 Herleitung einer Approximation an das Nahfeld

Im Folgenden sei u_θ das Feld, das entsteht, wenn man das Potential V mit der ebenen Welle $u_\theta^i(x) = e^{ik<\theta,x>}$ bestrahlt. Unser Ziel ist es, eine Approximation an das Fernfeld f zu erhalten. Das Fernfeld f ist durch (1.11) gegeben,

$$f(k,\theta,\theta') = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik<\theta',y>} V(y) u_\theta(y)\, dy.$$

Man benötigt also das Nahfeld u_θ im Innern des Trägers von V, um das Fernfeld $f(k,\theta,\cdot)$ mit Hilfe von (1.11) berechnen zu können. Das Nahfeld erfüllt die Lippmann-Schwinger-Gleichung (1.10),

$$u_\theta(x) = e^{ik<\theta,x>} - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|y|}}{|y|} V(x-y) u_\theta(x-y)\, dy.$$

Um das Fernfeld $f(k,\theta,\theta')$ approximativ berechnen zu können, wird zuerst eine Approximation $u_{\theta,\theta'}$ an u_θ hergeleitet, die nur von θ, θ' und dem Potential V abhängt, also direkt berechenbar ist. Setzt man diese Approximation $u_{\theta,\theta'}$ anstelle des exakten Feldes u_θ in (1.11) ein, so erhält man die gewünschte Näherung an das Fernfeld f. Es wird deshalb für jedes $\theta' \in S^2$ eine andere Approximation an das Nahfeld in (1.11) eingesetzt, da sich dadurch eine bessere Darstellung der Eikonalapproximation ergeben wird, die unter Einschränkungen an den Realteil von V auch invertierbar sein wird. Speziell stellt die Eikonalapproximation auch eine Beziehung zwischen dem Fernfeld f und der Röntgentransformation $\mathcal{P}V$ von V her.

Wir gehen von der Lippmann-Schwinger Gleichung (1.10) aus. φ_θ definieren wir als das Verhältnis von Gesamtfeld u_θ zur einfallenden Welle u_θ^i:

$$\varphi_\theta(x) = e^{-ik<\theta,x>} u_\theta(x) = 1 + \frac{u_\theta^s(x)}{u_\theta^i(x)},$$

wobei u_θ^s das gestreute Feld ist. Setzt man φ_θ in (1.10) ein, so erhält man eine Integralgleichung für φ_θ:

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(x) &= e^{-ik<\theta,x>} u_\theta(x) \\ &= 1 - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik(|y|-<\theta,y>)}}{|y|} V(x-y)\varphi_\theta(x-y)\, dy. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Unser Ziel ist es, die Gleichung (2.1) durch eine Integralgleichung anzunähern, die "leicht lösbar" ist. Die gesuchte Approximation wird darin bestehen, dass man anstatt der Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art (2.1) eine Volterrasche Integralgleichung zweiter Art lösen wird, bei der nur noch über eine Linie

$$L_{\omega,b} := \{x \in \mathbb{R}^3 : x = b + \rho\omega, \rho \in \mathbb{R}\},\ \ b \in \omega^\perp,\ \ \omega \in S^2 \text{ fest},$$

integriert werden wird. Dies wird das ursprünglich dreidimensionale Problem auf ein eindimensionales Problem reduzieren.
Dazu definieren wir $\omega \in S^2$ durch

$$\omega := \frac{\theta + \theta'}{|\theta + \theta'|}, \ \ \theta + \theta' \neq 0.$$

Gleichung (2.1) lässt sich in der Form

$$\varphi_\theta(x) = 1 - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik(|y| - <\omega, y>)}}{|y|} e^{ik<\omega - \theta, y>} V(x-y) \varphi_\theta(x-y)\, dy$$

schreiben. Wir führen Kugelkoordinaten mit Nordpol ω ein: μ ist der Winkel zwischen ω und y, es gilt also $<\omega, y>= |y| \cos\mu$. α ist der Winkel zwischen der Projektion $P_{\omega^\perp} y$ von y auf $\omega^\perp$,

$$P_{\omega^\perp} y = y - <y, \omega> \omega,$$

und einem festen Bezugspunkt $p \in \omega^\perp$. Die Darstellung von y in Kugelkoordinaten lautet:

$$y(r,\mu,\alpha) = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \sin\mu \\ r \sin\alpha \sin\mu \\ r\cos\mu \end{pmatrix}.$$

Man erhält folgende Darstellung für φ_θ:

$$\varphi_\theta(x) = 1 - \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r e^{ikr(1-\cos\mu)} \psi_\theta(r,\mu,\alpha) \sin\mu \, d\mu\, d\alpha\, dr,$$

wobei wir den "Restterm" ψ_θ durch

$$\psi_\theta(r,\mu,\alpha) := e^{ik<\omega-\theta, y>} V(x-y)\varphi_\theta(x-y), \ \ y = y(r,\mu,\alpha)$$

definieren. Wegen

$$r \sin\mu e^{ikr(1-\cos\mu)} = \frac{1}{ik} \frac{d}{d\mu} e^{ikr(1-\cos\mu)}$$

lässt sich das innere Integral mit Hilfe partieller Integration auswerten:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi r e^{ikr(1-\cos\mu)} \psi_\theta(r,\mu,\alpha) \sin\mu\, d\mu \ \ &= \ \ \frac{1}{ik} e^{ikr(1-\cos\mu)} \psi_\theta(r,\mu,\alpha) \Big|_0^\pi \\ &\quad - \frac{1}{ik} \int_0^\pi e^{ikr(1-\cos\mu)} \frac{\partial}{\partial\mu} \psi_\theta(r,\mu,\alpha)\, d\mu. \end{aligned}$$

Nun rechnen wir die Randterme aus:
Setzt man $\mu = \pi$, so gilt

$$y(r,\pi,\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} = -r\omega \text{ und damit auch } <\omega - \theta, y> = -r(1 - <\theta, \omega>).$$

Man erkennt, dass $\psi_\theta(r,\pi,\alpha) = e^{-ikr(1-<\theta,\omega>)}V(x+r\omega)\varphi_\theta(x+r\omega)$ unabhängig von α ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{ik}e^{ikr(1-\cos\pi)}\psi_\theta(r,\pi,\alpha) &= \frac{1}{ik}e^{2ikr}e^{-ikr(1-<\theta,\omega>)}V(x+r\omega)\varphi_\theta(x+r\omega)\\ &= \frac{1}{ik}e^{ikr(1+<\theta,\omega>)}V(x+r\omega)\varphi_\theta(x+r\omega).\end{aligned}$$

Analog gilt für $\mu = 0$:

$$y(r,0,\alpha) = \begin{pmatrix}0\\0\\r\end{pmatrix} = r\omega \text{ und damit auch } <\omega-\theta, y>= r(1-<\theta,\omega>).$$

Man erkennt, dass auch $\psi_\theta(r,0,\alpha) = e^{ikr(1-<\theta,\omega>)}V(x-r\omega)\varphi_\theta(x-r\omega)$ unabhängig von α ist. Es gilt

$$\frac{1}{ik}e^{ikr(1-\cos 0)}\psi_\theta(r,0,\alpha) = \frac{1}{ik}e^{ikr(1-<\theta,\omega>)}V(x-r\omega)\varphi_\theta(x-r\omega).$$

In beiden Randtermen ergibt die Integration nach α nun den Faktor 2π. Also gilt

$$\begin{aligned}\varphi_\theta(x) = 1 &- \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{ik}e^{ikr(1-\cos\mu)}\psi_\theta(r,\mu,\alpha)\Big|_0^\pi\right.\\ &\qquad \left.-\frac{1}{ik}\int_0^\pi e^{ikr(1-\cos\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\psi_\theta(r,\mu,\alpha)\,d\mu\right)d\alpha\,dr\\ = 1 &- \frac{i}{2k}\int_0^\infty e^{ikr(1-<\theta,\omega>)}V(x-r\omega)\varphi_\theta(x-r\omega)\,dr\\ &+ \frac{i}{2k}\int_0^\infty e^{ikr(1+<\theta,\omega>)}V(x+r\omega)\varphi_\theta(x+r\omega)\,dr\\ &- \frac{i}{4\pi k}\int_0^\infty\int_0^\pi\left(e^{ikr(1-\cos\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\int_0^{2\pi}\psi_\theta(r,\mu,\alpha)\,d\alpha\right)d\mu\,dr\\ = 1 &- \frac{i}{2k}\int_0^\infty V(x-r\omega)\varphi_\theta(x-r\omega)\,dr \qquad (2.2)\\ &- \frac{i}{2k}\int_0^\infty(e^{ikr(1-<\theta,\omega>)}-1)V(x-r\omega)\varphi_\theta(x-r\omega)\,dr \qquad (2.3)\\ &+ \frac{i}{2k}\int_0^\infty e^{ikr(1+<\theta,\omega>)}V(x+r\omega)\varphi_\theta(x+r\omega)\,dr \qquad (2.4)\\ &- \frac{i}{4\pi k}\int_0^\infty\int_0^\pi\left(e^{ikr(1-\cos\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\int_0^{2\pi}\psi_\theta(r,\mu,\alpha)\,d\alpha\right)d\mu\,dr. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

Sei $V\varphi_\theta$ das punktweise Produkt von V mit φ_θ. Für großes k (d.h. $k\to\infty$) entsprechen (2.4) und (2.5) Fourierkoeffizienten von $V\varphi_\theta$ bzgl. hoher Frequenzen. Laut [9] sind (2.4) und (2.5) klein im Vergleich zu (2.2), und wir können (2.4) und (2.5) vernachlässigen. Gilt nun $\theta \approx \omega$, d.h. ist der Winkel zwischen θ und ω "klein", so können wir erwarten, dass dann

$$S := \sup\{|kr(1- < \theta, \omega >)| : r \geq 0,\ x - r\omega \in supp(V)\}$$

wegen des kompakten Trägers von V klein ist. Dabei hängt die Größe von S von k und von x ab. Damit ist auch der Integrand in (2.3) wegen $\lim_{t\to 0}\exp(it) = 1$ klein, und wir können auch (2.3) vernachlässigen. Setzt man $x = b + \rho\omega$ und substitutiert man $t = \rho - r$, so erhält man folgende Näherung:

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(b+\rho\omega) &\approx 1 - \frac{i}{2k}\int_0^\infty V\left(b + (\rho - r)\omega\right)\varphi_\theta\left(b + (\rho - r)\omega\right) dr \\ &= 1 - \frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho} V(b+t\omega)\varphi_\theta(b+t\omega)\, dt. \end{aligned}$$

Nun definieren wir unsere Approximation an φ_θ, die von θ und ω, also von θ und θ' abhängt. $\varphi_{\theta,\theta'}$ sei Lösung von

$$\varphi_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega) = 1 - \frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho} V(b+r\omega)\varphi_{\theta,\theta'}(b+r\omega)\, dr. \tag{2.6}$$

Dass es gerechtfertigt ist, $\varphi_{\theta,\theta'}$ als Approximation an φ_θ zu betrachten, wird in Abschnitt 2.4 mit Hilfe des *Gronwall-Lemmas* gezeigt werden. Differenziert man (2.6) nach ρ, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\varphi_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega) = -\frac{i}{2k}V(b+\rho\omega)\varphi_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega).$$

$\varphi_{\theta,\theta'}$ soll die gleiche Normierungsbedingung wie φ_θ erfüllen,

$$\varphi_{\theta,\theta'}(x) = e^{-ik<\theta,x>}u_{\theta,\theta'}(x),$$

wobei $u_{\theta,\theta'}$ die gesuchte Approximation an das Nahfeld ist. Fordert man

$$\lim_{\rho\to-\infty}\frac{u_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega)}{u^i_\theta(b+\rho\omega)} = 1,$$

so ergibt sich aufgrund der Normierung $\varphi_{\theta,\theta'} = u_{\theta,\theta'}/u^i_\theta$,

$$\lim_{\rho\to-\infty}\varphi_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega) = 1.$$

Man erhält also ein Anfangswertproblem mit der eindeutig bestimmten Lösung

$$\varphi_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega) = \exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho} V(b+r\omega)\, dr\right).$$

Damit folgt für die Approximation $u_{\theta,\theta'}$ an u_θ:

$$u_\theta(b+\rho\omega) \approx u_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega) := e^{ik<b+\rho\omega,\theta>}\cdot e^{-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho} V(b+r\omega)\, dr}. \tag{2.7}$$

Wählt man für jedes $(\omega, b) \in T$ ein $\tilde\rho$, so dass $b + \tilde\rho\omega$ außerhalb des Trägers von V liegt, so erhält man eine angenäherte Beziehung zwischen u_θ und der Röntgentransformation $\mathcal{P}V$ von V:

$$u_\theta(b+\tilde\rho\omega) \approx u_{\theta,\theta'}(b+\tilde\rho\omega) = e^{ik<b+\tilde\rho\omega,\theta>}\cdot e^{-\frac{i}{2k}\mathcal{P}V(\omega,b)}.$$

2.1.2 Herleitung einer Approximation an das Fernfeld

Nun soll eine Näherung an das Fernfeld f hergeleitet werden. Dazu geht man von der Gleichung (1.11) aus, die angibt, wie man aus dem Nahfeld u_θ das zugehörige Fernfeld f berechnet:

$$f(k,\theta,\theta') = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik<\theta',y>}V(y)u_\theta(y)\,dy.$$

Setzt man anstelle des exakten Nahfelds u_θ die Approximation $u_{\theta,\theta'}$ ein,

$$u_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega) = e^{ik<b+\rho\omega,\theta>}\cdot e^{-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho}V(b+r\omega)\,dr},\ \omega\in S^2,\ b\in\omega^\perp,$$

so erhält man mit Hilfe des Satzes von Fubini eine Näherung an das Fernfeld f, die nur noch von dem (bekannten) Potential V abhängt, also direkt berechenbar ist:

$$f(k,\theta,\theta') \approx -\frac{1}{4\pi}\int_{\omega^\perp}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik<\theta-\theta',b+\rho\omega>}V(b+\rho\omega)\cdot e^{-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho}V(b+r\omega)\,dr}\,d\rho\,db.$$

Beachtet man

$$<\theta-\theta',\omega> = \frac{1}{|\theta+\theta'|}<\theta-\theta',\theta+\theta'> = \frac{1}{|\theta+\theta'|}(|\theta|^2-|\theta'|^2) = 0,$$

so lässt sich der erste Exponentialterm vor das innere Integral ziehen:

$$\begin{aligned} f(k,\theta,\theta') \approx & -\frac{1}{4\pi}\int_{\omega^\perp} e^{-ik<\theta-\theta',b>} \\ & \cdot\int_{\mathbb{R}} V(b+\rho\omega)\exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho}V(b+r\omega)\,dr\right)d\rho\,db. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dadurch vereinfacht sich das ρ-Integral wesentlich, so dass es sich leicht ausrechnen lässt. Es gilt

$$\frac{d}{d\rho}\exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho}V(b+r\omega)dr\right) = -\frac{i}{2k}V(b+\rho\omega)\exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho}V(b+r\omega)dr\right).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty}V(b+\rho\omega)\exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho}V(b+r\omega)\,dr\right)d\rho \\ = & \ 2ki\ \exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho}V(b+r\omega)\,dr\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} \\ = & \ 2ki\left(\exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\infty}V(b+r\omega)\,dr\right)-1\right). \end{aligned}$$

Setzt man diese Gleichung in die Gleichung (2.8) ein, so erhält man die Eikonalapproximation A_k. Es gilt $f(k,\theta,\theta') \approx A_k V(\theta,\theta')$ mit

$$A_k V(\theta,\theta') := -\frac{ik}{2\pi}\int_{\omega^\perp} e^{-ik<\theta-\theta',b>}\left(\exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\infty} V(b+r\omega)\,dr\right)-1\right)db.$$

Ist das Potential V radialsymmetrisch (d.h. $V(x)=\tilde V(|x|)$), so hängt der eingeklammerte Exponentialausdruck nur noch vom Betrag von b ab. Speziell ist er unabhängig von ω, und wir können

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wählen. Wir definieren

$$\chi(r) := \exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde V(\sqrt{r^2+t^2})\,dt\right)-1.$$

Wegen des kompakten Trägers von V, und da $\exp(0)=1$ gilt, ist der Träger von χ kompakt. Wir schreiben b und $\theta-\theta'$ in Polarkoordinaten

$$b = r\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \omega^\perp,\ \ \theta-\theta' = |\theta-\theta'|\begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix} \in \omega^\perp.$$

Ist φ der Winkel zwischen θ und θ', so gilt $|\theta-\theta'| = 2\sin(\frac{\varphi}{2})$, und

$$\begin{aligned} <\theta-\theta',b> &= 2r\sin(\frac{\varphi}{2})(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \\ &= 2r\sin(\frac{\varphi}{2})\cos(\alpha-\beta). \end{aligned}$$

Damit gilt für $A_k V$

$$A_k V(\theta,\theta') = -\frac{ik}{2\pi}\int_0^\infty r\chi(r)\int_0^{2\pi} e^{-2ikr\sin(\frac{\varphi}{2})\cos(\alpha-\beta)}\,d\alpha\,dr.$$

Mit der Integraldarstellung der Besselfunktion (vgl. [1], Formel 9.1.21) erhält man

$$A_k V(\theta,\theta') = -ik\int_0^\infty r\chi(r)J_0\left(2kr\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)dr. \tag{2.9}$$

Für die Besselfunktion J_0 gilt die Reihendarstellung (vgl. [15], Formel (18.37))

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)J_{2l+1}(r)P_l(\cos\varphi) = \frac{1}{2}rJ_0\left(r\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right). \tag{2.10}$$

Aufgrund der Debye'schen Formel (vgl. [10])

$$0 \leq J_\nu(\vartheta\nu) \leq (2\pi\nu)^{-1/2}(1-\vartheta^2)^{-1/4}e^{-(\nu/3)(1-\vartheta^2)^{3/2}} \text{ für } 0 \leq \vartheta \leq 1,\ \nu > 0,$$

gilt ab einem genügend großen Index N

$$0 \leq J_l(r) \leq (2\pi l)^{-1/2}(1-M^2)^{-1/4}e^{-(l/3)(1-M^2)^{3/2}}$$

für alle $l > N$ und für alle $r \in \operatorname{supp}(\chi)$ für ein geeignetes $0 \leq M < 1$. Da außerdem die Legendre-Polynome beschränkt sind, $|P_l| \leq 1$, konvergiert die Reihe (2.10) auf dem kompakten Träger von χ gleichmäßig bzgl. r. Deshalb kann man (2.10) in (2.9) einsetzen, und Integration und Summation vertauschen. Man erhält eine Entwicklung der Eikonalapproximation nach Legendre-Polynomen,

$$A_k V(\theta,\theta') = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left[-i\int_0^\infty \chi(r)J_{2l+1}(2kr)\,dr\right]P_l(\cos\varphi). \tag{2.11}$$

Setzt man $t = 2kr$, so ergibt sich

$$A_k V(\theta,\theta') = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left[-\frac{i}{2k}\int_0^\infty \chi\left(\frac{t}{2k}\right)J_{2l+1}(t)\,dt\right]P_l(\cos\varphi). \tag{2.12}$$

Die Entwicklung (2.11) bzw. (2.12) konvergiert wegen der Debye'schen Formel und des kompakten Trägers von χ gleichmäßig.

2.2 Operatordarstellung der Eikonalapproximation

Um die Eikonalapproximation besser untersuchen zu können, zerlegen wir sie in einzelne Operatoren, um aus Eigenschaften dieser Operatoren auf Eigenschaften der Eikonalapproximation schließen zu können. Wir werden uns dabei wie in Abschnitt 2.1 im Wesentlichen an die Vorgehensweise in [9] halten. Zuerst sei $\mathcal{P}$ die bereits in Abschnitt 1.3 beschriebene Röntgentransformation. Sie ordnet einer integrierbaren Funktion V ihre Linienintegrale zu,

$$\mathcal{P}V(\omega,b) = \int_{\mathbb{R}} V(b+t\omega)\,dt.$$

Dabei ist (ω,b) aus dem Tangentialbündel T der Einheitssphäre. Die Eikonalapproximation erhält nun die Form

$$A_k V(\theta,\theta') = -\frac{ik}{2\pi}\int_{\omega^\perp} e^{-ik<\theta-\theta',b>}\left(\exp\left(-\frac{i}{2k}\mathcal{P}V(\omega,b)\right)-1\right)db.$$

Weiterhin definieren wir den Operator $\mathcal{E}$ durch

$$\mathcal{E}z := \exp\left(-\frac{i}{2k}z\right) - 1,$$

wobei z eine komplexe Zahl sei. Der Operator $\mathcal{E}$ wirkt punktweise auf Funktionen $W : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\mathcal{E}W(z) := \exp\left(-\frac{i}{2k}W(z)\right) - 1.$$

Nun lässt sich die Eikonalapproximation in der Form

$$A_k V(\theta, \theta') = -\frac{ik}{2\pi} \int_{\omega^\perp} e^{-ik<\theta-\theta',b>} \mathcal{E}\mathcal{P}V(\omega, b)\, db$$

schreiben. Mit der in Abschnitt 1.3 definierten Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\omega^\perp}$ erhält man die Darstellung

$$\begin{aligned} A_k V(\theta, \theta') &= -ik\mathcal{F}_{\omega^\perp}\left(\mathcal{E}\mathcal{P}V(\omega, \cdot)\right)(k(\theta - \theta')),\ \omega = \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|} \\ &= -ik\widehat{\mathcal{E}\mathcal{P}V}(\omega, k(\theta - \theta')). \end{aligned}$$

Allerdings kennen wir $\mathcal{F}_{\omega^\perp}\left(\mathcal{E}\mathcal{P}V(\omega, \cdot)\right)(\xi)$ nur für $\xi \in B_{2k}(0) \cap \omega^\perp$, da θ und θ' aus S^2 sind. Deshalb führen wir den *Tiefpassfilter*

$$\mathcal{B}_{2k} W(\xi) := \begin{cases} W(\xi) & : \quad |\xi| \le 2k \\ 0 & : \quad |\xi| > 2k \end{cases}$$

ein.

Für θ und θ' aus S^2 entspricht $\frac{i}{k} A_k V(\theta, \theta')$ dem Wert der Fouriertransformierten $\mathcal{F}_{\omega^\perp}\left(\mathcal{E}\mathcal{P}V\right)(\omega, \cdot)$ an der Stelle $\xi = k(\theta - \theta')$. Deshalb definieren wir die *Sortierfunktion* s_k durch

$$s_k(\theta, \theta') = \left(\frac{\theta + \theta'}{|\theta + \theta'|}, k(\theta - \theta')\right),\ \theta, \theta' \in S^2.$$

Der *Sortieroperator* S_k sei durch

$$S_k W(\theta, \theta') := W(s_k(\theta, \theta'))$$

definiert. Dabei ist W eine Funktion, die auf dem Tangentialbündel T definiert ist. Schreibt man noch die punktweise Multiplikation mit der Konstanten $-ik$ in Operatorschreibweise:

$$\mathcal{M}_k W(x) := -ikW(x),$$

wobei x aus dem Definitionsbereich einer Funktion W ist, so kann man die Eikonalapproximation in der Form

$$A_k V = \mathcal{M}_k S_k (\mathcal{B}_{2k} \widehat{\mathcal{E}\mathcal{P}V})$$

oder kürzer als

$$A_k = \mathcal{M}_k S_k \mathcal{B}_{2k} \mathcal{F}\mathcal{E}\mathcal{P}$$

schreiben.

2.3 Die Inversion der Eikonalapproximation

Die Darstellung der Eikonalapproximation als Hintereinanderausführung von Röntgentransformation $\mathcal{P}$, dem Operator $\mathcal{E}$, Fouriertransformation $\mathcal{F}$, dem Tiefpassfilter $\mathcal{B}_{2k}$, dem Sortieroperator S_k und dem Operator $\mathcal{M}_k$ legt es nahe, diese Operatoren einzeln zu invertieren, und dadurch eine Inversion der Eikonalapproximation zu erhalten. Wie schon erwähnt, lässt sich die Eikonalapproximation A_k als

$$A_k = \mathcal{M}_k S_k \mathcal{B}_{2k} \mathcal{F} \mathcal{E} \mathcal{P} \tag{2.13}$$

schreiben. Zuerst soll gezeigt werden, dass das Potential V eindeutig durch die Eikonalapproximation $A_k V$ bestimmt ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass alle in (2.13) auftretenden Operatoren invertierbar sind. Dies ist für alle oben genannten Operatoren, außer für den Operator $\mathcal{E}$ der Fall.

Da die Exponentialfunktion im Komplexen nicht injekiv ist, muss der Realteil von $\mathcal{P}V$ betragsmäßig kleiner als $2k\pi$ sein, damit man $\mathcal{P}V$ aus $\mathcal{E}\mathcal{P}V$ bestimmen kann. Ist der Realteil von $\mathcal{P}V$ größer als $2k\pi$, so kann man die dadurch entstehenden Schwierigkeiten umgehen, wenn $\mathcal{E}\mathcal{P}V$ stetig ist, vgl. Abschnitt 3.1.

Weiterhin soll angedeutet werden, auf welche Art man die Eikonalapproximation (analytisch) invertieren könnte. Dazu gehen wir von einer Inversionsformel I zur Inversion der Röntgentransformation aus, die wir nicht näher spezifizieren wollen. In diesem Abschnitt ist es nur wesentlich, wie man die Inversionen der vor der Röntgentransformation in Gleichung (2.13) auftretenden Operatoren an die Inversion I der Röntgentransformation anpassen muss, um die von I benötigten Werte $\mathcal{P}V(\omega, b)$ zu erhalten. Die Formel I zur Inversion der Röntgentransformation sollte so gewählt sein, dass die Formel zur Inversion der Eikonalapproximation, die man dadurch erhält möglichst gute Eigenschaften hat (z.B. Zeitkomplexität oder Stabilität).

In Abschnitt 1.3.2 wurden bereits Inversionformeln für die Röntgentransformation angegeben. Es sollen nun zwei Notationen eingeführt werden. G_ω sei die Menge der $\omega \in S^2$, für die ein $b \in \omega^\perp$ existiert, so dass die Formel I den Wert $\mathcal{P}V(\omega, b)$ zur Bestimmung des Potentials V benötigt:

$$G_\omega := \{\omega \in S^2 : \exists\, b \in \omega^\perp,\ \mathcal{P}V(\omega, b) \text{ wird von Formel } I \text{ benötigt}\}.$$

G_b sei die Menge der zugehörigen $b \in \omega^\perp$:

$$G_b := \{b \in \mathbb{R}^3 : \exists\, \omega \in S^2,\ b \in \omega^\perp,\ \mathcal{P}V(\omega, b) \text{ wird von Formel } I \text{ benötigt}\}.$$

Um die Fouriertransformation zu invertieren, betrachten wir jedes $\omega \in G_\omega$ als festen Parameter und invertieren die jeweilige zweidimensionale Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\omega^\perp}$ durch eine inverse Fouriertransformation. Dazu benötigt man die Daten $\widehat{\mathcal{E}\mathcal{P}V}(\omega, \xi)$ für alle $\xi \in \omega^\perp$, unabhängig davon, ob G_b nur aus einem Element besteht, oder ob $G_b = \omega^\perp$ ist, also ob die Formel I alle $b \in \omega^\perp$ benötigt.

Ist $\mathcal{EPV}(\omega,\cdot)$ bandbeschränkt, so wird man $\widehat{\mathcal{EPV}}(\omega,\xi)$ wenigstens auf einer genügend großen offenen Teilmenge von $\omega^\perp$ benötigen.

Will man die Eikonalapproximation numerisch invertieren, so hängt allerdings die Zeitkomplexität der Implementierung der Inversionsformel von der Größe von G_b ab. Man kann dies durch die Verwendung der schnellen inversen Fouriertransformation (IFFT) zwar kompensieren, so dass die Komplexität nur unwesentlich ansteigt, aber die schnelle inverse Fouriertransformation verlangt ihre Eingabewerte auf einem kartesischen Gitter, was eine Einschränkung an die Messgeometrie bedeutet. Eine äquidistante Abtastung der Daten $A_kV(\theta,\theta') = -ik\widehat{\mathcal{EPV}}(s_k(\theta,\theta'))$ auf $S^2 \times S^2$ führt nämlich nicht zu einer äquidistanten Abtastung der für eine IFFT benötigten Werte auf $\omega^\perp$. Dieses Problem muss man dadurch lösen, dass man die bekannten Daten zuerst auf ein kartesisches Gitter interpoliert, und erst dann die IFFT anwendet. Ähnliche Probleme treten bei der Fourierrekonstruktion in der Röntgen-Computertomographie (vgl. [11]) und bei der "Diffraction Tomography" in der Ultraschalltomographie (vgl. [7] und [11]) auf. Am Beispiel der Fourierrekonstruktion erkennt man, dass das Problem "gut" zu interpolieren sehr schwierig sein kann. Das größte Problem dabei ist, dass die Qualität der Rekonstruktionen stark von der Art der Interpolation abhängt. Eine "schlechte" Interpolation führt dabei zu sehr großen Fehlern bei der Rekonstruktion.

Da in diesem Abschnitt nur die Existenz von Inversionsformeln für die Eikonalapproximation untersucht wird, und nicht ihre numerische Implementierung, soll dies hier nicht näher untersucht werden. Allerdings ist es sinnvoll, die Probleme, die durch die numerische Implementation entstehen, schon bei der Untersuchung von analytischen Inversionsformeln zu erwähnen.

Wie schon gesagt, verlangt die Inversion der Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\omega^\perp}$ die Werte $\widehat{\mathcal{EPV}}(\omega,\xi)$ für alle $\xi \in \omega^\perp$, bzw. für alle ξ in einer geeigneten offenen Teilmenge von $\omega^\perp$, falls $\mathcal{EPV}(\omega,\cdot)$ bandbeschränkt ist. Allerdings ist $\widehat{\mathcal{EPV}}(\omega,\cdot)$ nur auf einer Kreisfläche mit Radius $2k$ um 0 bekannt. Nimmt man jedoch an, dass der Träger von V in $B_1(0)$ kompakt ist, so ist auch der Träger von $\mathcal{PV}(\omega,\cdot)$ für alle $\omega \in S^2$ in $\omega^\perp$ kompakt, und wegen $\mathcal{E}0 = 0$ ist auch der Träger von $\mathcal{EPV}(\omega,\cdot)$ in $\omega^\perp$ kompakt. Da die Fouriertransformierte einer Funktion mit kompakten Träger analytisch ist, (vgl. [17]), sind die Funktionen $\widehat{\mathcal{EPV}}(\omega,\cdot)$ bereits durch ihre Funktionswerte auf der Menge $\omega^\perp \cap B_{2k}(0)$ bestimmt. Allerdings ist die analytische Fortsetzung von $\mathcal{B}_{2k}\widehat{\mathcal{EPV}}(\omega,\cdot)$ numerisch nicht stabil berechenbar, weshalb man auf eine Inversion von $\mathcal{B}_{2k}$ verzichten wird. Man berechnet deshalb eine Tiefpassgefilterte Version $\widetilde{\mathcal{EPV}}$ von $\mathcal{EPV}$:

$$\widetilde{\mathcal{EPV}}(\omega,\cdot) := \mathcal{F}_{\omega^\perp}^{-1}\mathcal{B}_{2k}\mathcal{F}_{\omega^\perp}(\mathcal{EPV})(\omega,\cdot).$$

Zuletzt muss man noch klären, wie man die Daten, die man zur Inversion der Fouriertransformation benötigt, abtasten muss. Dazu genügt es zu einem gegebenen Paar $(\omega, \xi) \in T$, $|\xi| \leq 2k$, ein Paar $(\theta, \theta') \in S^2 \times S^2$ zu bestimmen, so dass $s_k(\theta, \theta') = (\omega, \xi)$ gilt. Es wird nun gezeigt werden, dass das Paar (θ, θ') eindeutig durch ω und ξ bestimmt ist, dass also s_k invertierbar ist.

Lemma 2.1 *Seien* $\omega \in S^2$, $\xi \in B_{2k}(0) \cap \omega^\perp := \{\eta \in \mathbb{R}^3 : |\eta| \leq 2k,\ \eta \in \omega^\perp\}$, $k > 0$. *Dann gibt es genau ein Paar* $(\theta, \theta') \in (S^2 \times S^2)$, *so dass*

$$\omega = \frac{\theta + \theta'}{|\theta + \theta'|},\ \text{und}\ \xi = k(\theta - \theta')$$

oder äquivalent

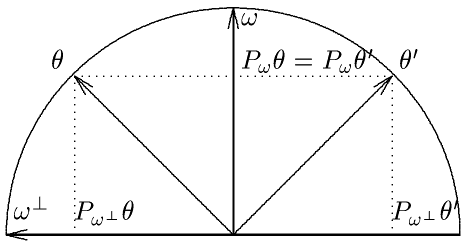
$$s_k(\theta, \theta') = (\omega, \xi)$$

gilt.

BEWEIS:
Wegen der Forderung $\frac{\theta+\theta'}{|\theta+\theta'|} = \omega$ muss

$$P_{\omega^\perp}\theta = -P_{\omega^\perp}\theta'$$

gelten, wobei $P_{\omega^\perp}\theta$ die Orthogonalprojektion von θ auf $\omega^\perp$, bzw. $P_{\omega^\perp}\theta'$ die Orthogonalprojektion von θ' auf $\omega^\perp$ ist.



Weiterhin muss, da $k(\theta - \theta') = \xi \in \omega^\perp$ gelten soll, die Beziehung

$$P_\omega\theta = P_\omega\theta'$$

erfüllt sein. P_ω ist dabei analog zu $P_{\omega^\perp}$ definiert. Wir erhalten nun für (θ, θ') die Darstellung

$$(\theta, \theta') = (P_\omega\theta + P_{\omega^\perp}\theta, P_\omega\theta - P_{\omega^\perp}\theta) = (\theta, 2 < \theta, \omega > \omega - \theta).$$

Speziell sieht man, dass θ' eindeutig durch θ und ω bestimmt ist:

$$\theta'(\theta, \omega) := 2 < \theta, \omega > \omega - \theta. \tag{2.14}$$

Wegen $k(\theta - \theta') = \xi$ gilt

$$\frac{\xi}{2k} = \frac{\theta - \theta'}{2} = P_{\omega^\perp}\theta.$$

Da $|\theta| = 1$ ist, folgt daraus

$$|P_\omega \theta| = \sqrt{1 - |P_{\omega^\perp}\theta|^2} = \sqrt{1 - \frac{|\xi|^2}{4k^2}} = \frac{\sqrt{4k^2 - |\xi|^2}}{2k},$$

und da wegen (2.14) $< \theta, \omega >= \frac{2|<\theta,\omega>|^2}{|\theta+\theta'|} \geq 0$ gilt:

$$(\theta, \theta') = \left(\frac{\sqrt{4k^2 - |\xi|^2}}{2k}\omega + \frac{\xi}{2k}, \frac{\sqrt{4k^2 - |\xi|^2}}{2k}\omega - \frac{\xi}{2k} \right). \tag{2.15}$$

□

Als Folgerung aus Lemma 2.1 erhält man die Inverse des Sortieroperators S_k.

Bemerkung 2.2 (Sortieroperator) *Sei $k > 0$. $\tilde{T}$ sei durch*

$$\tilde{T} := \{(\omega, \xi) \in T : \ |\xi| \leq 2k\}$$

definiert. $Fun(\tilde{T})$ bzw. $Fun(S^2 \times S^2)$ seien die Mengen der auf $\tilde{T}$ bzw. auf $S^2 \times S^2$ definierten Funktionen. Die Inverse der Sortierfunktion s_k ist wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} s_k^{-1} : \ \tilde{T} \quad &\longrightarrow \quad S^2 \times S^2 \\ (\omega, \xi) \quad &\longmapsto \quad (\theta, \theta') = \left(\frac{\sqrt{4k^2 - |\xi|^2}}{2k}\omega + \frac{\xi}{2k}, \frac{\sqrt{4k^2 - |\xi|^2}}{2k}\omega - \frac{\xi}{2k} \right). \end{aligned}$$

Sie ordnet einem Paar $(\omega, \xi) \in \tilde{T}$ das nach Lemma 2.1 eindeutig bestimmte Paar (θ, θ') zu, für das $\omega = \frac{\theta+\theta'}{|\theta+\theta'|}$ und $\xi = k(\theta - \theta')$ gilt.
Die Inverse des Sortieroperators *S_k ist durch*

$$\begin{aligned} S_k^{-1} : Fun(S^2 \times S^2) \quad &\longrightarrow \quad Fun(\tilde{T}) \\ W \quad &\longmapsto \quad \tilde{W} := W \circ s_k^{-1} \end{aligned}$$

definiert, wobei $\tilde{W}(\omega, \xi) := W(s_k^{-1}(\omega, \xi))$.
Lässt man $\omega \in S^2$ fest, so ist $s_{k,\omega}^{-1}$ durch

$$s_{k,\omega}^{-1}(\xi) := s_k^{-1}(\omega, \xi)$$

gegeben. $S_{k,\omega}^{-1}$ erhält man analog zu S_k^{-1}, wenn man $\omega \in S^2$ fest lässt.

□

In dem folgendem Satz wird zusammengefasst, wie man das Potential V aus den Werten $A_k V(\theta, \theta')$, $\theta \in S^2$, $\theta' \in S^2$ bei fester Wellenzahl k berechnen kann.

Satz 2.3 (Inversion der Eikonalapproximation) *Das Potential V habe kompakten Träger, und es gelte* $\sup |\frac{\Re \mathcal{P} V}{2k}| < \pi$*. Dann gilt*

$$\mathcal{P}V(\omega, b) = \mathcal{E}^{-1}\mathcal{F}_{\omega^\perp}^{-1}\mathcal{B}_{2k}^{-1}\left(\mathcal{M}^{-1}S_k^{-1}A_k V(\omega, \cdot)\right)(b), \tag{2.16}$$

für $\omega \in S^2$ und $b \in \omega^\perp$. Aus Formel (2.16) folgt direkt eine Inversionsformel für die Eikonalapproximation.

□

Ist das Potential V radialsymmetrisch (d.h. $V(x) = \tilde{V}(|x|)$), so lässt sich eine Inversionsformel für die Eikonalapproximation aus der Reihendarstellung (2.12) herleiten. Die Entwicklung der Eikonalapproximation nach Legendre-Polynomen lautet

$$A_k V(\theta, \theta') = \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{(2l+1)\left[-\frac{i}{2k}\int_0^{\infty} \chi\left(\frac{t}{2k}\right) J_{2l+1}(t)\, dt\right]}_{=:c_l} P_l(\cos\varphi).$$

φ sei der Winkel zwischen θ und θ', und $\chi(r)$ ist durch

$$\chi(r) := \exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(\sqrt{r^2+t^2})\, dt\right) - 1 = \mathcal{EP}V(\omega, b), \ |b| = r,$$

definiert. Die Koeffizienten dieser Entwicklung bezeichnen wir mit c_l.

Nimmt man an, dass sich $t\chi(\frac{t}{2k})$ nach Besselfunktionen entwickeln lässt,

$$-\frac{i}{2k} t\chi(\frac{t}{2k}) \stackrel{!}{=} \sum_{j=0}^{\infty} d_j J_{2j+1}(t), \tag{2.17}$$

so kann man mit Hilfe der Orthogonalität der Besselfunktionen (vgl. [15], Formel (18.39))

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{2l+1}(t) J_{2n+1}(t)}{t}\, dt = \frac{\delta_{ln}}{2(2l+1)}$$

aus den Koeffizienten c_l die Funktion χ berechnen. Setzt man (2.17) in die Definition von c_l ein und vertauscht man Summation und Integration, so erhält man

$$\begin{aligned} c_l &= -\frac{i}{2k}\int_0^{\infty} J_{2l+1}(t)\chi\left(\frac{t}{2k}\right) dt\, (2l+1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2l+1}(t) J_{2n+1}(t)}{t}\, dt\, (2l+1) \\ &= \frac{d_l}{2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (2.17) und $r = \frac{t}{2k}$

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2c_l J_{2l+1}(2kr) = -ir\chi(r).$$

Diese Überlegungen kann man in folgendem Lemma zusammenfassen.

Lemma 2.4 *Sei das Potential V radialsymmetrisch, d.h. es gelte $V(x) = \tilde{V}(|x|)$ mit einer auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion $\tilde{V}$. Für die Eikonalapproximation A_kV gibt es eine Reihenentwicklung*

$$A_kV(\theta, \theta') = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(\cos\varphi), \;\; \varphi \textit{ sei der Winkel zwischen } \theta \textit{ und } \theta'.$$

Definiert man $\chi(|b|) := \mathcal{EP}V(\omega, b)$, so gilt, wenn χ die Gleichung (2.17) erfüllt

$$-i|b|\mathcal{EP}V(\omega, b) = \sum_{l=0}^{\infty} 2c_l J_{2l+1}(2k|b|). \tag{2.18}$$

Daraus folgt eine Inversionsformel für die Eikonalapproximation, die auf der Reihendarstellung (2.12) aufbaut.

□

2.4 Die Differenz zwischen Eikonalapproximation und exaktem Fernfeld

In diesem Abschnitt werden wir den Fehler untersuchen, der bei der Berechnung des Fernfelds mit Hilfe der Eikonalapproximation entsteht. Dazu werden wir zuerst den Fehler untersuchen, der bei der näherungsweisen Berechnung des Nahfelds mittels Formel (2.7) entsteht, und dann untersuchen, wie sich dieser Fehler auf unsere Approximation an das Fernfeld auswirkt.

Um den Fehler zu untersuchen, der durch die Approximation im Nahfeld entsteht, werden wir die Vorgehensweise untersuchen, die in Abschnitt 2.1.1 zu dieser Approximation geführt hat.

u_θ sei das Feld, das entsteht, wenn man das Potential V mit der ebenen Welle $u_\theta^i(x) = e^{ik<\theta,x>}$ bestrahlt. u_θ erfüllt die *Lippmann-Schwinger-Gleichung* (1.10)

$$u_\theta(x) = e^{ik<\theta,x>} - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|y|}}{|y|} u_\theta(x-y)V(x-y)\,dy.$$

Man kann sie auch in der Form

$$(I - A_V)u_\theta(x) = e^{ik<\theta,x>} \tag{2.19}$$

schreiben. Der Index V soll andeuten, dass der Operator A_V von dem Potential V abhängig ist,

$$A_V\psi(x) := -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|y|}}{|y|}\psi(x-y)V(x-y)\,dy.$$

φ_θ war durch $\varphi_\theta(x) = e^{-ik<\theta,x>}u_\theta(x)$ definiert. Durch Einsetzen von $\varphi_\theta(x) = e^{-ik<\theta,x>}u_\theta(x)$ in die Lippmann-Schwinger-Gleichung haben wir die Gleichung

$$\varphi_\theta(x) = 1 - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik(|y|-<\theta,y>)}}{|y|} V(x-y)\varphi_\theta(x-y)\,dy$$

erhalten, die wir dann in die Zeilen (2.2)-(2.5) zerlegt haben. Der wesentliche Schritt zur Herleitung der Approximation bestand darin, dass wir nur noch Zeile (2.2) betrachtet haben und die Zeilen (2.3)-(2.5) ignoriert haben. Diese Vorgehensweise wird nun für das Feld u_θ nachvollzogen werden.

Setzt man $u_\theta(x) = e^{ik<\theta,x>}\varphi_\theta(x)$ in (2.2)-(2.5) ein, so erhält man eine Gleichung für u_θ,

$$\begin{aligned} u_\theta(x) &= e^{ik<\theta,x>} && (2.20)\\ &\quad -\frac{i}{2k}\int_0^\infty e^{ikr<\theta,\omega>}V(x-r\omega)u_\theta(x-r\omega)\,dr && (2.21)\\ &\quad -\frac{i}{2k}\int_0^\infty \left(e^{ikr}-e^{ikr<\theta,\omega>}\right)V(x-r\omega)u_\theta(x-r\omega)\,dr && (2.22)\\ &\quad +\frac{i}{2k}\int_0^\infty e^{ikr}V(x+r\omega)u_\theta(x+r\omega)\,dr && (2.23)\\ &\quad -\frac{i}{4\pi k}\int_0^\infty\int_0^\pi \left(e^{ikr(1-\cos\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\int_0^{2\pi}\psi_\theta(r,\mu,\alpha)\,d\alpha\right)d\mu\,dr, && (2.24)\end{aligned}$$

$\psi_\theta(r,\mu,\alpha)$ ist durch

$$\begin{aligned}\psi_\theta(r,\mu,\alpha) &:= e^{ik<\omega,y>}V(x-y)u_\theta(x-y),\ \ y=y(r,\mu,\alpha)\\ &= e^{ikr\cos\mu}V(x-y)u_\theta(x-y)\end{aligned}$$

gegeben. Die Zeilen (2.20)-(2.24) lassen sich unter Berücksichtigung von (2.19) auch in der Form

$$\begin{aligned} u_\theta(x) &= e^{ik<\theta,x>} + A_V u_\theta(x)\\ &= e^{ik<\theta,x>} + (A_{V,1}+A_{V,2})u_\theta(x)\end{aligned}$$

schreiben. Die beiden Operatoren $A_{V,1}$ und $A_{V,2}$ sind durch

$$A_{V,1}u_\theta(x) = -\frac{i}{2k}\int_0^\infty e^{ikr<\theta,\omega>}V(x-r\omega)u_\theta(x-r\omega)\,dr \tag{2.25}$$

und

$$\begin{aligned} A_{V,2}u_\theta(x) &:= -\frac{i}{2k}\int_0^\infty \left(e^{ikr}-e^{ikr<\theta,\omega>}\right)V(x-r\omega)u_\theta(x-r\omega)\,dr\\ &\quad +\frac{i}{2k}\int_0^\infty e^{ikr}V(x+r\omega)u_\theta(x+r\omega)\,dr \qquad (2.26)\\ &\quad -\frac{i}{4\pi k}\int_0^\infty\int_0^\pi \left(e^{ikr(1-\cos\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\int_0^{2\pi}\psi_\theta(r,\mu,\alpha)\,d\alpha\right)d\mu\,dr\end{aligned}$$

definiert. Wir erhalten eine Zerlegung des Operators A_V:

$$A_V = A_{V,1} + A_{V,2}. \tag{2.27}$$

Sei ϕ eine differenzierbare Funktion, für die sowohl $|V\phi|$ als auch $|\nabla(V\phi)|$ beschränkt und integrierbar sind, wobei $V\phi$ das punktweise Produkt aus V und ϕ ist. Der Träger von V sei in der Kugel $B_a(0)$ mit Radius a um 0 enthalten. Für $\psi(r,\mu,\alpha) := e^{ikr\cos\mu} V(x-y)\phi(x-y)$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\mu}\int_0^{2\pi}\psi(r,\mu,\alpha)d\alpha &= -ikr\sin\mu e^{ikr\cos\mu}\int_0^{2\pi}V(x-y)\phi(x-y)d\alpha \qquad (2.28)\\ &\quad + e^{ikr\cos\mu}\int_0^{2\pi} < \nabla(V\phi)(x-y), \frac{\partial y}{\partial\mu}(r,\mu,\alpha) > \, d\alpha\end{aligned}$$

Damit lässt sich der Betrag der linken Seite von (2.28) abschätzen:

$$\left|\frac{\partial}{\partial\mu}\int_0^{2\pi}\psi(r,\mu,\alpha)\,d\alpha\right| \le 2\pi kr\|V\phi\|_\infty + 2\pi r\|\nabla(V\phi)\|_\infty.$$

Es folgt eine Abschätzung für $A_{V,2}\phi$:

$$\begin{aligned}\|A_{V,2}\phi\|_\infty &\le \frac{3a}{2k}\|V\phi\|_\infty + \frac{a\pi}{4\pi k}(2\pi ka\|V\phi\|_\infty + 2\pi a\|\nabla(V\phi)\|_\infty)\\ &= \frac{a}{2k}(3+\pi ka)\|V\phi\|_\infty + \frac{a^2\pi}{2k}\|\nabla(V\phi)\|_\infty. \qquad (2.29)\end{aligned}$$

Anstatt (2.19) werden wir nun die Gleichung

$$(I - A_{V,1})u_{\theta,\theta'}(x) = e^{ik<\theta,x>} \tag{2.30}$$

- oder ausführlicher - die Gleichung

$$u_{\theta,\theta'}(x) = e^{ik<\theta,x>} - \frac{i}{2k}\int_0^\infty V(x-r\omega)u_{\theta,\theta'}(x-r\omega)\cdot e^{ik<\theta,r\omega>}\,dr \tag{2.31}$$

betrachten. Setzt man $x = b + \rho\omega$, und fordert man als Anfangswertbedingung

$$\lim_{\rho\to-\infty}\frac{u_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega)}{u_\theta^i(b+\rho\omega)} \stackrel{!}{=} 1,$$

so erhält man wie in Abschnitt 2.1 die Approximation

$$u_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega) = \exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^\rho V(b+r\omega)\,dr\right)\cdot e^{ik<\theta,b+\rho\omega>}. \tag{2.32}$$

Den bei dieser Approximation entstehenden Fehler bezeichnen wir mit $d_{\theta,\theta'}$:

$$d_{\theta,\theta'}(x) := u_\theta(x) - u_{\theta,\theta'}(x).$$

Benutzt man (2.19), (2.27) und (2.30), so erhält man

$$d_{\theta,\theta'}(x) = (A_{V,1} + A_{V,2})u_\theta(x) - A_{V,1}u_{\theta,\theta'}(x).$$

Daraus ergibt sich eine Integralgleichung für $d_{\theta,\theta'}$:

$$\boxed{(I - A_{V,1})d_{\theta,\theta'} = A_{V,2}u_\theta} \tag{2.33}$$

Man erhält also eine Integralgleichung zweiter Art für den Fehler $d_{\theta,\theta'}$, deren rechte Seite von der (unbekannten) Lösung des direkten Streuproblems abhängt. Alternativ kann man (2.33) auch in der Form

$$\begin{aligned}(I - A_{V,1})d_{\theta,\theta'} &= A_V u_\theta - A_{V,1}u_\theta \\ &= (I - A_{V,1})u_\theta - u_\theta^i\end{aligned}$$

schreiben.

Kann man den Betrag der rechten Seite von (2.33) nach oben Abschätzen, so lässt sich auch der Fehler $d_{\theta,\theta'}$ mit Hilfe des *Gronwall-Lemmas* abschätzen.

Lemma 2.5 (Gronwall-Lemma) *Sei* $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und* $L \geq 0,\ C > 0$. *Gilt*

$$0 \leq \varphi(x) \leq L \int_a^x \varphi(t)\,dt + C, \text{ für alle } x \in [a,b],$$

dann ist

$$\varphi(x) \leq Ce^{L(x-a)}.$$

□

Setzt man $x = b + \rho\omega$, so erhält man nach einer Substitution aus (2.33)

$$d_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega) = -\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho} e^{ik(\rho-t)<\theta,\omega>}V(b+t\omega)d_{\theta,\theta'}(b+t\omega)\,dt + A_{V,2}u_\theta(b+\rho\omega). \tag{2.34}$$

Wendet man das Gronwall-Lemma auf Gleichung (2.34) an, so erhält man eine Abschätzung für den Betrag des Fehlers $d_{\theta,\theta'}$ im Innern des Trägers von V:

Satz 2.6 (Fehlerabschätzung I) *Die integrierbare Funktion V habe kompakten Träger in der Kugel $B_a(0)$ mit Radius a um 0 und V sei beschränkt. Dann gilt für alle $x = b + \rho\omega$, die im Innern des Trägers von V liegen*

$$|d_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega)| \leq C_{b,\omega}\, e^{D_{b,\omega}\cdot\left(\rho+\sqrt{a^2-|b|^2}\right)} \tag{2.35}$$

mit den Konstanten

$$C_{b,\omega} = \sup\{|A_{V,2}u_\theta(b+\rho\omega)| : b+\rho\omega \in \ supp(V)\}$$

und

$$D_{b,\omega} = \frac{1}{2k}\sup\{|V(b+\rho\omega)| : b+\rho\omega \in \ supp(V)\}.$$

□

Nimmt man an, dass das Potential V beschränkt ist, und kompakten Träger besitzt, so muss man nur noch eine geeignete Abschätzung für $C_{b,\omega}$ finden, und man erhält aus Formel (2.35) die gesuchte Abschäzung für den Fehler $d_{\theta,\theta'}$.

Eine andere Möglichkeit, eine Integralgleichung für $d_{\theta,\theta'}$ herzuleiten, besteht darin, in die Definition von $d_{\theta,\theta'}$ die Gleichungen (2.19) und (2.30) einzusetzen:

$$\begin{aligned} d_{\theta,\theta'}(x) &= u_\theta(x) - u_{\theta,\theta'}(x) \\ &= A_V u_\theta(x) - A_{V,1} u_{\theta,\theta'}(x). \end{aligned}$$

Gleichzeitige Addition und Subtraktion von $A_V u_{\theta,\theta'}$ ergibt:

$$\begin{aligned} d_{\theta,\theta'}(x) &= A_V\left(u_\theta - u_{\theta,\theta'}\right)(x) + \left(A_V - A_{V,1}\right) u_{\theta,\theta'}(x) \\ &= A_V d_{\theta,\theta'}(x) + A_{V,2} u_{\theta,\theta'}(x). \end{aligned}$$

Wir erhalten damit eine Integralgleichung für den Fehler $d_{\theta,\theta'}$:

$$\boxed{(I - A_V) d_{\theta,\theta'} = A_{V,2} u_{\theta,\theta'}} \tag{2.36}$$

Ist V bekannt, so kann man $u_{\theta,\theta'}$ ausrechnen. Dann lässt sich auch $A_{V,2}u_{\theta,\theta'}$ durch Einsetzen von $u_{\theta,\theta'}$ berechnen, wobei man nur Integrale auswerten muss. Angenommen, man kann für eine Norm $\|\cdot\|$ die Norm von $A_{V,2}u_{\theta,\theta'}$ nach oben abschätzen. Ist die zugehörige Operatornorm von A_V kleiner als 1, so kann man den Betrag von $d_{\theta,\theta'}$ mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes abschätzen. Ist V stetig differenzierbar, und wählt man als Norm die Supremumnsnorm $\|\cdot\|_\infty$, so gilt folgender Satz:

Satz 2.7 (Fehlerabschätzung II) *Die stetig differenzierbare Funktion V habe kompakten Träger in der Kugel $B_a(0)$ mit Radius a um 0. Weiterhin sei*

$$\frac{a^2}{2}\|V\|_\infty < 1. \tag{2.37}$$

Dann gilt für die Differenz $d_{\theta,\theta'}$ zwischen dem exakten Nahfeld u_θ und der Approximation $u_{\theta,\theta'}$

$$|d_{\theta,\theta'}(x)| \leq \frac{\|A_{V,2}u_{\theta,\theta'}\|_\infty}{1 - \frac{a^2}{2}\|V\|_\infty} < \infty, \text{ für } x \in B_a(0).$$

Hat die Funktion V die Gestalt $V = k^2 V_A$, so ist die Forderung (2.37) äquivalent zu $k^2 < \frac{2}{a^2\|V_A\|_\infty}$. In diesem Fall erhält man die Abschätzung

$$|d_{\theta,\theta'}(x)| \leq \frac{\|A_{V,2}u_{\theta,\theta'}\|_\infty}{1 - \frac{a^2k^2}{2}\|V_A\|_\infty} < \infty, \text{ für } x \in B_a(0).$$

Weiterhin gilt

$$\|A_{V,2}u_{\theta,\theta'}\|_\infty \leq \frac{a}{2k}(3 + \pi k a)\|V u_{\theta,\theta'}\|_\infty + \frac{a^2\pi}{2k}\|\nabla(V u_{\theta,\theta'})\|_\infty,$$

wobei $Vu_{\theta,\theta'}$ das punktweise Produkt von V und $u_{\theta,\theta'}$ ist.

BEWEIS:
In ([4], Satz 8.4) wird gezeigt, dass falls der Träger von $V = k^2 V_A$ kompakt ist, die Lippmann-Schwinger-Gleichung für $k^2 < 2/(\|V_A\|_\infty a^2)$ eindeutig lösbar ist. Dazu wird gezeigt, dass

$$|A_V u(x)| \le \frac{a^2\|V\|_\infty}{2}\|u\|_\infty \tag{2.38}$$

für alle $u \in C(\overline{B_a(0)})$ und alle $x \in \overline{B_a(0)}$ gilt. Die Ungleichung (2.38) gilt unabhängig davon, ob V von k abhängig ist, oder nicht. Betrachtet man A_V als Operator von $C(\overline{B_a(0)})$ nach $C(\overline{B_a(0)})$, so folgen dann die obigen Abschätzungen direkt aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Ist der Träger der stetig differenzierbaren Funktion V kompakt, so ist wegen der Definition von $u_{\theta,\theta'}$ auch $Vu_{\theta,\theta'}$ stetig differenzierbar und besitzt kompakten Träger. Die Abschätzung für $\|A_{V,2}u_{\theta,\theta'}\|_\infty$ folgt dann direkt aus Gleichung (2.29).

□

Die Sätze 2.6 und 2.7 erleichtern die Konstruktion von Abschätzungen für den Fehler $d_{\theta,\theta'}$. Ist V beschränkt, so genügt es jeweils, die rechten Seiten in (2.33) und (2.36) abzuschätzen, und man hat eine Abschätzung für $d_{\theta,\theta'}$. Ein Problem liegt allerdings darin, dass man, wenn man "gute" Fehlerabschätzungen erhalten will, die rechten Seiten in (2.33) bzw. in (2.36) berechnen muss, oder wenigstens einigermaßen gute Aussagen über diese rechten Seiten erhalten muss. Schätzt man die rechten Seiten in (2.33) bzw. in (2.36) zu grob ab, so könnte es in einigen Fällen nämlich einfacher sein, direkt die "triviale Abschätzung" $|d_{\theta,\theta'}(x)| \le |u_\theta(x)| + |u_{\theta,\theta'}(x)|$ zu verwenden.

Betrachtet man die Zerlegung (2.2)-(2.5) aus Abschnitt 2.1.1, so kann man analog zu der Vorgehensweise in diesem Abschnitt den Fehler $\varphi_\theta - \varphi_{\theta,\theta'}$ abschätzen,

$$|(\varphi_\theta - \varphi_{\theta,\theta'})(b+\rho\omega)| \le \frac{1}{2k}\int_{-\infty}^{\rho} |V(b+t\omega)||(\varphi_\theta - \varphi_{\theta,\theta'})(b+t\omega)|\,dt + R(V,\varphi_\theta). \tag{2.39}$$

Dabei sei $R(V,\varphi_\theta)$ das von V und φ_θ abhängige Supremum des Betrags der "Restterme" (2.3)-(2.5). Der entscheidende Schritt zur Herleitung der Approximation an das Nahfeld in Abschnitt 2.1.1 hat genau darin bestanden, dass man angenommen hat, die "Restterme" $R(V,\varphi_\theta)$ in (2.39) seien "klein". Ist V beschränkt und ist der Träger von V kompakt, so kann man den Fehler $\varphi_\theta - \varphi_{\theta,\theta'}$ mit Hilfe des Gronwall-Lemmas abschätzen, und man erhält analog zu Satz 2.6 eine Abschätzung für $|\varphi_\theta - \varphi_{\theta,\theta'}|$. Damit lässt sich die Vorgehensweise in Abschnitt 2.1.1 rechtfertigen.

Vergleicht man (2.33) und (2.36) miteinander, so sieht man, dass beide Gleichungen ihre Vor- und Nachteile besitzen, wenn man eine Abschätzung für $d_{\theta,\theta'}$ erhalten will. Der Integraloperator $A_{V,1}$ auf der linken Seite von (2.33) hat eine einfachere Struktur, als der Operator A_V, der auf der linken Seite von (2.36) auftaucht. Ist $b \in \omega^\perp$ fest, so kann man nämlich in (2.33) den Fehler $d_{\theta,\theta'}$ isoliert auf der Linie

$$L_{b,\omega} = \{b + \rho\omega : \rho \in \mathbb{R}\} \cap \operatorname{supp}(V)$$

betrachten. Man kann z.B. Satz 2.6 dazu benutzen, das Supremum $S_{b,\omega}$,

$$S_{b,\omega} = \sup\{|d_{\theta,\theta'}(b + \rho\omega)| : \rho \in \mathbb{R},\ b + \rho\omega \in \operatorname{supp}(V)\}$$

von $d_{\theta,\theta'}$ auf der Linie $L_{b,\omega}$ abzuschätzen. Da in A_V über ganz $\mathbb{R}^3$ integriert wird, kann man Satz 2.7 nur dazu benutzen, den Fehler $d_{\theta,\theta'}$ global innerhalb des Trägers von V abzuschätzen. Ein weiterer Nachteil von (2.36) liegt darin, dass falls V die Gestalt $V = k^2 V_A$ hat, Satz 2.7 eine einschränkende Bedingung an k stellt, während Satz 2.6 für alle Werte von k gilt. Ein Vorteil von (2.36) liegt allerdings darin, dass die rechte Seite von (2.36) nur durch Auswertung von Integralen berechenbar ist, während die rechte Seite in (2.33) von der Lösung u_θ des direkten Streuproblems abhängt.

Nun wird der Fehler untersucht, der im Fernfeld entsteht. Für das Fernfeld f gilt:

$$f(k, \theta, \theta') = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik<\theta', y>} V(y) u_\theta(y)\, dy,$$

während die Eikonalapproximation die Gleichung

$$A_k V(\theta, \theta') = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik<\theta', y>} V(y) u_{\theta,\theta'}(y)\, dy$$

erfüllt. Für den Fehler Λ_A gilt also

$$\begin{aligned} \Lambda_A(k, \theta, \theta') &:= f(k, \theta, \theta') - A_k V(\theta, \theta') \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik<\theta', y>} V(y) d_{\theta,\theta'}(y)\, dy. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Abschätzung

$$|\Lambda_A(k, \theta, \theta')| \leq \frac{S(V)}{4\pi} \|V\|_\infty \|d_{\theta,\theta'}\|_\infty,$$

wobei $S(V)$ das Volumen des Trägers von V ist.

Es soll nun eine andere Möglichkeit vorgestellt werden, wie man den Fehler untersuchen könnte, der bei der Berechnung des Fernfeldes mit Hilfe der Eikonalapproximation entsteht. Ist das Potential V radialsymmetrisch (d.h. $V(x) = \tilde{V}(|x|)$), so besitzen sowohl das Fernfeld f, als auch die Eikonalapproximation eine Entwicklung nach Legendre-Polynomen. Im Folgenden sei φ der Winkel zwischen θ und θ'. Die Entwicklung des Fernfeldes nach Legendre-Polynomen ist in Abschnitt 1.1, Gleichung (1.17) beschrieben worden,

$$f_k(\theta, \theta') = -\frac{i}{k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos\varphi).$$

b_n sind die Entwicklungskoeffizienten des gestreuten Feldes gemäß Formel (1.16),

$$u_\theta^s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{4\pi} b_n h_n^{(1)}(k|x|) P_n(\cos\varphi).$$

Die Entwicklung der Eikonalapproximation nach Legendre-Polynomen ist in Gleichung (2.11) angegeben worden. Sie lautet

$$A_k V(\theta, \theta') = -i \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^\infty J_{2l+1}(2rk)\chi(r)\,dr \right] (2l+1) P_l(\cos\varphi),$$

wobei $\chi(r)$ durch

$$\chi(r) = e^{-\frac{i}{2k}\int_{\mathbb{R}} \tilde{V}(\sqrt{r^2+t^2})\,dt} - 1$$

definiert ist. Wegen

$$|P_l(\cos\varphi)| \leq 1$$

erhält man als Abschätzung für den Fehler $\Lambda_A(k, \theta, \theta')$,

$$|\Lambda_A(k,\theta,\theta')| \leq \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left| \frac{b_l}{4\pi k} - \int_0^\infty J_{2l+1}(2rk)\chi(r)\,dr \right|. \tag{2.40}$$

2.5 Ein Ansatz zur Lösung des inversen Mediumproblems

2.5.1 Grundlegende Vorgehensweise

Im Folgenden sei die Wellenzahl $k > 0$ konstant. $f_k(\theta, \cdot)$ sei das Fernfeld, das entsteht, wenn man das Potential V mit der ebenen Welle $u_\theta^i(x) = e^{ik<\theta,x>}$ bestrahlt. Wir werden nun sowohl die Richtung θ der einfallenden ebenen Welle, als auch die Stelle θ', an der das Fernfeld gemessen wird, als variabel betrachten.

Eine Möglichkeit, aus dem Fernfeld f das Potential V zu berechnen besteht darin, das Fernfeld f als im Bild der Eikonalapproximation befindlich zu betrachten, und dann die inverse Eikonalapproximation auf das Fernfeld f anzuwenden. Allerdings muss das Fernfeld nicht im Bild der Eikonalapproximation liegen. Weiterhin ist, da mit V auch $\mathcal{EP}V(\omega, \cdot)$ kompakten Träger besitzt, und da die Fouriertransformation einer integrierbaren Funktion mit kompaktem Träger analytisch ist (vgl. [17]), die Gleichung $A_k V = f_k$ extrem schlecht gestellt (vgl. [10]). Deshalb wird man in numerischen Anwendungen regularisieren müssen. Wir werden nun von Gleichung (2.16) aus Satz 2.3 ausgehen. Gleichung (2.16) kann man in Kurzform als

$$\mathcal{P}V = \mathcal{E}^{-1}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{B}_{2k}^{-1}\mathcal{M}_k^{-1}S_k^{-1}A_k V$$

schreiben. Indem man anstatt der Eikonalapproximation $A_k V$ das Fernfeld f in Gleichung (2.16) einsetzt, erhält man eine Approximation an das Potential V

$$\mathcal{P}V \approx \mathcal{E}^{-1}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{B}_{2k}^{-1}\mathcal{M}_k^{-1}S_k^{-1}f_k.$$

Seien $(\omega, b) \in T$ die Stellen, an denen die Röntgentransformation $\mathcal{P}V$ bekannt sein muss, um die Röntgentransformation invertieren zu können. Da es mehrere Formeln zur Inversion der Röntgentransformation gibt, und da die zur Inversion der Röntgentransformation benötigten Stellen $(\omega, b) \in T$ von der jeweils verwendeten Inversionsformel abhängen, werden wir im Folgenden diese Stellen nicht weiter spezifizieren.

Um die Fouriertransformation zu invertieren muss man die Integrale $\widetilde{\mathcal{E}\mathcal{P}V}$,

$$\widetilde{\mathcal{E}\mathcal{P}V}(\omega, b) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega^\perp} e^{i<\xi,b>}\mathcal{M}_k^{-1}\mathcal{B}_{2k}^{-1}S_k^{-1}f_k(\omega,\xi)\,d\xi$$

ausrechnen.

Da die Inversion des Tiefpassfilters $\mathcal{B}_{2k}$ numerisch extrem instabil ist, werden wir auf die Inversion von $\mathcal{B}_{2k}$ verzichten. Betrachtet man außerdem den entscheidenden Schritt zur Herleitung der Approximation an das Nahfeld (vgl. Abschnitt 2.1), so liegt wegen (2.3) die Vermutung nahe, dass der Fehler $\Lambda_A(k,\theta,\theta')$ "groß" wird, wenn $<\theta,\omega>$ "klein" ist. $<\theta,\omega>$ liegt dabei zwischen 0 und 1. Im Fall $<\theta,\omega>= 1$, d.h. bei "Vorwärtsstreuung" verschwindet der Term (2.3). In diesem Fall scheint die Herleitung der Approximation an das Nahfeld gerechtfertigt. Im Fall $<\theta,\omega>= 0$, d.h. bei "Rückwärtsstreuung" (backscattering) scheint die Herleitung der Approximation an das Nahfeld, und damit die Herleitung der Eikonalapproximation nicht mehr gültig zu sein.

Die Funktion $s_{k,\omega}^{-1}$ gibt an, wie man das Fernfeld abtasten muss, um die zur Inversion der Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\omega^\perp}$ benötigten Daten zu erhalten. $s_{k,\omega}^{-1}(\xi)$ ergibt das Paar (θ,θ'), für das

$$\omega = \frac{\theta+\theta'}{|\theta+\theta'|} \text{ und } \xi = k(\theta-\theta')$$

gilt.

Wählt man $\omega \in S^2$ fest, und lässt man $\xi \in \omega^\perp \cap B_{2k}(0)$ variabel, so erhält man mit (2.15),

$$s_{k,\omega}^{-1}(\xi) = (\theta, \theta'(\theta,\omega)) = \left(\frac{\sqrt{4k^2-|\xi|^2}}{2k}\omega + \frac{\xi}{2k},\ \frac{\sqrt{4k^2-|\xi|^2}}{2k}\omega - \frac{\xi}{2k}\right),$$

dass $<\theta,\omega>= \frac{\sqrt{4k^2-|\xi|^2}}{2k}$ gilt. Fordern wir nun $<\theta,\omega>\geq c$, mit einer Konstanten $0 \leq c \leq 1$, so ist dies äquivalent zu

$$|\xi| \leq \gamma := 2k\sqrt{1-c^2}. \tag{2.41}$$

Wollen wir also die Daten $f_k(\theta,\theta')$, von denen wir erwarten, dass der zugehörige Fehler beim Lösen des direkten Problems groß ist, nicht zur Inversion der Eikonalapproximation verwenden, so entspricht dies der Anwendung eines zusätzlichen Tiefpassfilters $\mathcal{B}_\gamma$, $0 \leq \gamma \leq 2k$.

In diesem Abschnitt werden wir also anstatt $\mathcal{P}A_k^{-1}f_k$ eine Funktion $\widetilde{\mathcal{P}V}$ berechnen, für die gilt

$$\mathcal{E}\widetilde{\mathcal{P}V}(\omega,b) = \mathcal{F}_{\omega^\perp}^{-1}\left(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{B}_\gamma S_k^{-1}f_k(\omega,\cdot)\right)(b), \text{ für } \omega \in S^2 \text{ und } b \in \omega^\perp. \tag{2.42}$$

Dies entspricht der Auswertung der Integrale

$$I(\omega,b) := \frac{i}{2\pi k}\int_{\omega^\perp\cap B_\gamma(0)} e^{i<\xi,b>} f_k(s_{k,\omega}^{-1}(\xi))\,d\xi. \tag{2.43}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Integrale $I(\omega,b)$ aus den gemessenen (oder simulierten) Fernfelddaten numerisch zu berechnen. Die erste Möglichkeit besteht darin, das Integral in Gleichung (2.43) durch eine Quadraturformel zu approximieren. Dazu muss das Fernfeld f an den Stellen bekannt sein, die zur Auswertung dieser Quadraturformel benötigt werden. Ist das Fernfeld an diesen Stellen nicht bekannt, so muss man die benötigten Daten aus den bekannten Daten interpolieren.

Hier soll allerdings eine andere Möglichkeit untersucht werden:
Da das Fernfeld eine Funktion mit Definitionsbereich $S^2\times S^2$ ist, könnte man das Integral $I(\omega,b)$ durch eine Koordinatentransformation an die zur Verfügung stehenden Daten anpassen. Wir werden also das Integral $I(\omega,b)$ durch ein Integral darstellen, in dem über eine Teilmenge von S^2 integriert werden wird. Das Fernfeld $f_k(\theta,\theta')$ ist zwar auf $S^2\times S^2$ gegeben, aber wenn ω fest ist, gibt es für jedes $\theta \in S^2$ genau ein $\theta' \in S^2$, so dass $f_k(\theta,\theta')$ zur Berechnung von $I(\omega,b)$ benötigt wird. Dies soll nun genauer dargestellt werden.

Wir bezeichnen die Mannigfaltigkeit, auf der die Daten liegen, die zur Inversion der Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\omega^\perp}$ benötigt werden, als $D_\omega \subset S^2\times S^2$

$$D_\omega := \left\{(\theta,\theta') \in S^2\times S^2 : \frac{\theta+\theta'}{|\theta+\theta'|} = \omega\right\}.$$

Da die Richtung $\omega \in S^2$ fest ist, ist durch $\xi \in \omega^\perp\cap B_{2k}(0)$ das Paar $(\theta,\theta') = s_{k,\omega}^{-1}(\xi)$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt sind bereits durch $\theta \in S^2$ und $\omega \in S^2$ das $\xi \in \omega^\perp$ und die Stelle $\theta'(\theta,\omega) \in S^2$ bestimmt, für die $s_{k,\omega}(\theta,\theta') = (\omega,\xi)$ gilt,

$$\theta'(\theta,\omega) = P_\omega\theta - P_{\omega^\perp}\theta = 2 <\theta,\omega> \omega - \theta.$$

Man erhält also

$$D_\omega = \left\{(\theta,\theta') \in S^2\times S^2 : \theta' = 2<\theta,\omega>\omega-\theta\right\}.$$

Will man $I(\omega, b)$ durch ein Integral darstellen, dessen Integrationsbereich eine Teilmenge der Einheitssphäre S^2 ist, so wird man ξ und $s_{k,\omega}^{-1}(\xi)$ durch lokale Koordinaten darstellen. Die gewünschte Darstellung von $I(\omega, b)$ erhält man dann durch eine Koordinatentransformation, indem man die Koordinaten von $s_{k,\omega}^{-1}(\xi)$ durch diejenigen von ξ ausdrückt. D_ω kann man dadurch parametrisieren, dass man θ und $\theta'(\theta, \omega)$ durch Kugelkoordinaten darstellt. Als Nordpol der Sphäre wählen wir

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hat dann θ die Koordinaten (μ, β), d.h.

$$\theta(\mu, \beta) := \begin{pmatrix} \cos\beta \sin\mu \\ \sin\beta \sin\mu \\ \cos\mu \end{pmatrix},$$

so hat das zugehörige $\theta'(\theta, \omega)$ die Koordinaten $(-\mu, \beta)$,

$$\theta'(-\mu, \beta) := \begin{pmatrix} \cos\beta \sin(-\mu) \\ \sin\beta \sin(-\mu) \\ \cos(-\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\beta \sin\mu \\ -\sin\beta \sin\mu \\ \cos\mu \end{pmatrix}.$$

Man erhält dadurch als mögliche Parametrisierung von D_ω,

$$D_\omega = \left\{ \Psi(\mu, \beta) := (\theta(\mu, \beta), \theta'(-\mu, \beta)),\ 0 \le \mu \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \beta \le 2\pi \right\}.$$

Ψ bilde die Koordinaten von $\theta \in S^2$ auf das Paar $(\theta, \theta'(\theta, \omega)) \in D_\omega$ ab. Die Funktion Φ bilde die Polarkoordinaten (σ, α) eines $\xi \in \omega^\perp$ auf ξ ab,

$$\Phi(\sigma, \alpha) := \begin{pmatrix} \sigma\cos\alpha \\ \sigma\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \xi(\sigma, \alpha).$$

Als Nächstes wird eine Funktion Ω berechnet,

$$\Omega : (0, 2k) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi),$$

die die Koordinaten von $\xi \in \omega^\perp \cap B_{2k}(0)$ auf die Koordinaten von $s_{k,\omega}^{-1}(\xi) \in D_\omega$ abbildet. Gemäß Bemerkung 2.2 gilt

$$\begin{aligned} s_{k,\omega}^{-1}(\xi) &= \left(\frac{\sqrt{4k^2 - |\xi|^2}}{2k}\omega + \frac{\xi}{2k},\ \frac{\sqrt{4k^2 - |\xi|^2}}{2k}\omega - \frac{\xi}{2k} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} \frac{\sigma}{2k}\cos\alpha \\ \frac{\sigma}{2k}\sin\alpha \\ \frac{\sqrt{4k^2-\sigma^2}}{2k} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{2k}\cos\alpha \\ -\frac{\sigma}{2k}\sin\alpha \\ \frac{\sqrt{4k^2-\sigma^2}}{2k} \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

$s_{k,\omega}^{-1}(\xi)$ habe die Koordinaten

$$\left(\begin{pmatrix} \sin\mu\cos\beta \\ \sin\mu\sin\beta \\ \cos\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\mu\cos\beta \\ -\sin\mu\sin\beta \\ \cos\mu \end{pmatrix} \right).$$

Es muss also

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma}{2k}\cos\alpha \\ \frac{\sigma}{2k}\sin\alpha \\ \frac{\sqrt{4k^2-\sigma^2}}{2k} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \sin\mu\cos\beta \\ \sin\mu\sin\beta \\ \cos\mu \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

gelten. Die Gleichung (2.44) wird von $\beta = \alpha$ und $\mu = \arcsin\frac{\sigma}{2k}$ erfüllt. Die gesuchte Funktion Ω ist also durch

$$\Omega(\sigma,\alpha) = \left(\arcsin\frac{\sigma}{2k}, \alpha\right) \tag{2.45}$$

gegeben. Der Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix von Ω ist

$$\left|\frac{\partial\Omega(\sigma,\alpha)}{\partial(\sigma,\alpha)}\right| = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\arcsin\frac{\sigma}{2k}\right) = \frac{1}{\sqrt{4k^2-\sigma^2}} \stackrel{(2.44)}{=} \frac{1}{2k\cos\mu}.$$

Wegen

$$\Psi\circ\Omega = s_{k,\omega}^{-1}\circ\Phi$$

erhält man folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \omega^\perp \cap B_{2k}(0) \arrow[r, "s_{k,\omega}^{-1}"] & D_\omega \\ (0,2k)\times(0,2\pi) \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r, "\Omega"] & (0,\frac{\pi}{2})\times(0,2\pi) \arrow[u, "\Psi"'] \end{tikzcd}$$

Damit lässt sich $I(\omega,b)$ in der Form

$$\begin{aligned} I(\omega,b) &= \frac{i}{2\pi k}\int_{\omega^\perp\cap B_\gamma(0)} e^{i<\xi,b>} f_k(s_{k,\omega}^{-1}(\xi))\,d\xi \\ &= \frac{i}{2\pi k}\int_0^\gamma \sigma\int_0^{2\pi} e^{i<s_{k,\omega}s_{k,\omega}^{-1}(\Phi(\sigma,\alpha)),b>} f_k(s_{k,\omega}^{-1}(\Phi(\sigma,\alpha)))\,d\alpha\,d\sigma \end{aligned}$$

schreiben. Wegen $\Psi\circ\Omega = s_{k,\omega}^{-1}\circ\Phi$ gilt

$$I(\omega,b) = \frac{i}{2\pi k}\int_0^\gamma \sigma\int_0^{2\pi} e^{i<s_{k,\omega}(\Psi(\Omega(\sigma,\alpha))),b>} f_k(\Psi(\Omega(\sigma,\alpha)))\,d\alpha\,d\sigma.$$

Die Koordinatentransformation $(\mu, \beta) = \Omega(\sigma, \alpha)$ ergibt wegen $\sigma \overset{(2.45)}{=} 2k \sin \mu$, $\left| \frac{\partial \Omega(\sigma,\alpha)}{\partial(\sigma,\alpha)} \right| = \frac{1}{\sqrt{4k^2-\sigma^2}}$, und $\sqrt{4k^2 - \sigma^2} \overset{(2.44)}{=} 2k \cos \mu$:

$$
\begin{aligned}
I(\omega, b) &= \frac{i}{2\pi k} \int_0^\gamma \left| \frac{\partial \Omega(\sigma, \alpha)}{\partial(\sigma, \alpha)} \right| \sigma \sqrt{4k^2 - \sigma^2} \\
&\quad \cdot \int_0^{2\pi} e^{i < s_{k,\omega}(\Psi(\Omega(\sigma,\alpha))), b>} f_k(\Psi(\Omega(\sigma, \alpha)))\, d\alpha\, d\sigma \\
&= \frac{2ki}{\pi} \int_0^{\arccos c} \sin \mu \cos \mu \int_0^{2\pi} e^{i < s_{k,\omega}(\Psi(\mu,\beta)), b>} f_k(\Psi(\mu, \beta))\, d\beta\, d\mu.
\end{aligned}
$$

Die Obergrenze im μ-Integral ergibt sich wegen

$$
\arcsin\left(\frac{\gamma}{2k}\right) \overset{(2.41)}{=} \arcsin\left(\sqrt{1 - c^2}\right) = \arccos(c).
$$

$\tilde{S}$ sei durch

$$
\tilde{S} := \left\{ \theta \in S^2, < \theta, \omega > \geq c \right\} = \left\{ \theta = \theta(\mu, \beta) \in S^2, 0 \leq \mu \leq \arccos c \right\}
$$

definiert. Schreibt man obiges Integral koordinatenfrei als Integral über $\tilde{S}$, so erhält man mit $d\theta = \sin \mu\, d\beta\, d\mu$ und $\cos \mu =< \theta, \omega >$

$$
\begin{aligned}
I(\omega, b) &= \frac{2ki}{\pi} \int_{\tilde{S}} e^{i < s_{k,\omega}(\theta, \theta'(\theta,\omega)), b>} f_k(\theta, \theta'(\theta, \omega)) < \theta, \omega > \, d\theta \\
&= \frac{2ki}{\pi} \int_{\tilde{S}} e^{ik < \theta - \theta'(\theta,\omega), b>} f_k(\theta, \theta'(\theta, \omega)) < \theta, \omega > \, d\theta \\
&= \frac{2ki}{\pi} \int_{\tilde{S}} e^{ik < \theta - 2 < \theta,\omega > \omega + \theta, b>} f_k(\theta, \theta'(\theta, \omega)) < \theta, \omega > \, d\theta \\
&= \frac{2ki}{\pi} \int_{\tilde{S}} e^{2ki < \theta, b>} f_k(\theta, \theta'(\theta, \omega)) < \theta, \omega > \, d\theta. \qquad (2.46)
\end{aligned}
$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt wegen $b \in \omega^\perp$. Durch punktweise Anwendung der Funktion $\mathcal{E}^{-1}$, gefolgt von einer Inversion der Röntgentransformation erhält man aus $I(\omega, b)$ schließlich die gesuchte Approximation an das Potential V.

Bisher war stets ω der Nordpol des jeweils verwendeten Koordinatensystems. Ausgehend von diesem Nordpol hat man dann aus den Kugelkoordinaten von θ diejenigen von θ' bestimmt. Verwendet man allerdings ein Koordinatensystem mit festem, von ω unabhängigem Nordpol, so kann man aus Formel (2.46) eine Formel (in Koordinatenschreibweise) angeben, die man zur Inversion der Eikonalapproximation verwenden könnte. Dazu muss man aus den Koordinaten von θ und ω diejenigen von $\theta'(\theta, \omega)$ berechnen.

Da zur Bestimmung einer Funktion V bereits die Kenntnis von $\mathcal{P}V(\omega, b)$ für die ω genügt, die auf einem Großkreis liegen (vgl. [17]), sei im Folgenden

$$\omega = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ω liege also auf dem "Äquator". Nach der Inversion der Fouriertransformationen $\mathcal{F}_{\omega^\perp}$, gefolgt von einer punktweisen Inversion des Operators $\mathcal{E}$ kann man dann das Potential V "schichtweise" wie in der 2D-Computertomographie berechnen. Die Einschränkung, ω auf dem "Äquator" zu wählen, ergibt sich dadurch, dass man für ein solches ω leicht die Koordinaten von $\theta'(\theta, \omega)$ aus denjenigen von θ und ω berechnen kann. Drückt man θ in Kugelkoordinaten aus,

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\mu \\ \sin\alpha\sin\mu \\ \cos\mu \end{pmatrix},$$

so erhält man als $\theta'(\theta, \omega) = 2 < \theta, \omega > \omega - \theta$ durch Anwendung der Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\theta'(\theta, \omega) &= \begin{pmatrix} \sin\mu[2(\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha)\cos\beta - \cos\alpha] \\ \sin\mu[2(\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha)\sin\beta - \sin\alpha] \\ -\cos\mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\mu[\cos\alpha(2\cos^2\beta - 1) + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\beta] \\ \sin\mu[\sin\alpha(2\sin^2\beta - 1) + 2\cos\alpha\sin\beta\cos\beta] \\ -\cos\mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\mu[\cos\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\beta] \\ \sin\mu[\sin\alpha(\sin^2\beta - \cos^2\beta) + 2\cos\alpha\sin\beta\cos\beta] \\ -\cos\mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\mu[\cos\alpha\cos(2\beta) + \sin\alpha\sin(2\beta)] \\ \sin\mu[\cos\alpha\sin(2\beta) - \sin\alpha\cos(2\beta)] \\ -\cos\mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin(\pi-\mu)\cos(2\beta-\alpha) \\ \sin(\pi-\mu)\sin(2\beta-\alpha) \\ \cos(\pi-\mu) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\theta'(\theta, \omega)$ hat also die Koordinaten $(\pi-\mu, 2\beta-\alpha)$. Es gilt $< \theta, \omega >= \sin\mu\cos(\alpha-\beta)$. Ist θ aus $\tilde{S}$, so muss $< \theta, \omega >\geq c$ und damit $\sin\mu\cos(\alpha-\beta) \geq c$ gelten. Da ω auf dem "Äquator" liegt, entsprechen die beiden Stellen, an denen der Sinus von μ $(0 \leq \mu \leq \pi)$ Null wird ($\mu = 0$ und $\mu = \pi$) einer Rückstreuung. Da wir Rückstreuung ausschließen, dürfen wir $\sin\mu > 0$ annehmen. Aus der Forderung $< \theta, \omega >\geq c$ folgt also

$$\cos(\alpha-\beta) \geq \frac{c}{\sin\mu}.$$

$\tilde{S}$ hat damit die folgende Darstellung

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \left\{\theta(\mu,\alpha)\in S^2 : \sin\mu \geq c,\ \cos(\alpha-\beta) \geq \frac{c}{\sin\mu}\right\} \\ &= \left\{\theta(\mu,\alpha)\in S^2 : c_1 \leq \mu \leq \pi - c_1,\ \beta - c_2 \leq \alpha \leq \beta + c_2\right\},\end{aligned}$$

mit $c_1 = \arcsin c$ und $c_2 = \arccos\left(\frac{c}{\sin\mu}\right)$. Mit $d\theta = \sin\mu\, d\alpha\, d\mu$ und $<\theta,\omega>= \sin\mu\cos(\alpha-\beta)$ lässt sich (2.46) in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned}I(\omega,b) &= \frac{2ki}{\pi}\int_{c_1}^{\pi-c_1}\int_{\beta-c_2}^{\beta+c_2} e^{2ki<\theta(\mu,\alpha),b>}\sin^2\mu\cos(\alpha-\beta) \\ &\qquad\qquad \cdot f_k(\theta(\mu,\alpha),\theta'(\pi-\mu,2\beta-\alpha))\, d\alpha\, d\mu \\ &= \frac{2ki}{\pi}\int_{c_1-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-c_1}\int_{-c_2}^{c_2} e^{2ki<\theta(\frac{\pi}{2}+\nu,\gamma+\beta),b>}\cos^2\nu\cos\gamma \\ &\qquad\qquad \cdot f_k(\theta(\frac{\pi}{2}+\nu,\beta+\gamma),\theta'(\frac{\pi}{2}-\nu,\beta-\gamma))\, d\gamma\, d\nu.\end{aligned}$$

Dabei wurde $\gamma = \alpha - \beta$ und $\nu = \mu - \frac{\pi}{2}$ substituiert.

2.5.2 Fehleruntersuchung

In diesem Abschnitt soll der Fehler untersucht werden, der entsteht wenn man die Eikonalapproximation zur Lösung des inversen Mediumproblems einsetzt. Zuerst wird der Approximationsfehler E des Verfahrens untersucht, der durch die Differenz zwischen der Eikonalapproximation und dem exakten Fernfeld entsteht. Dazu wenden wir die inverse Eikonalapproximation auf das Fernfeld f_k an, und untersuchen die Differenz zwischen der exakten Lösung V und $A_k^{-1}f_k$,

$$E := A_k^{-1}f_k - V.$$

Die Wellenzahl k ist in diesem Abschnitt konstant. Ist der Fehler Λ_A, der beim Lösen des Vorwärtsproblems entsteht bekannt, so kann man das Fernfeld f_k als

$$f_k(\theta,\theta') = A_k V(\theta,\theta') + \Lambda_A(k,\theta,\theta')$$

schreiben. Mit

$$A_k A_k^{-1} = I$$

folgt

$$\mathcal{M}_k S_k \mathcal{B}_{2k}\mathcal{F}\mathcal{E}\mathcal{P}A_k^{-1} = I.$$

Wendet man auf diese Gleichung die Multiplikation $\mathcal{M}_k^{-1}$, den inversen Sortieroperator S_k^{-1}, den inversen Tiefpassfilter $\mathcal{B}_{2k}$ und die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\omega^\perp}^{-1}$ an, so erhält man für die Eikonalapproximation (g sei eine Funktion, die im Bild der Eikonalapproximation liegt):

$$\mathcal{E}\mathcal{P}A_k^{-1}g(\omega,b) = \mathcal{F}_{\omega^\perp}^{-1}\mathcal{B}_{2k}^{-1}\left(\mathcal{M}_k^{-1}S_k^{-1}g(\omega,\cdot)\right)(b),\ \omega\in S^2,\ b\in\omega^\perp.$$

Wie schon in Abschnitt 2.5.1 erwähnt, verzichten wir auf die Inversion des Tiefpassfilters $\mathcal{B}_{2k}$. Außerdem wurde in Abschnitt 2.5.1 angedeutet, dass die Differenz zwischen dem Fernfeld f_k und der Eikonalapproximation A_kV besonders groß zu sein scheint, wenn Rückstreuung vorliegt. Die Werte $f_k(\theta,\theta')$ von denen man erwartet, dass sie "stark" von der Eikonalapproximation A_kV abweichen, kann man durch die Anwendung eines zusätzlichen Tiefpassfilters $\mathcal{B}_\gamma$, $0 \leq \gamma \leq 2k$ herausfiltern.

Wollen wir also die Daten $f_k(\theta,\theta')$, von denen wir erwarten, dass der zugehörige Fehler beim Lösen des direkten Problems groß ist, nicht zur Inversion der Eikonalapproximation verwenden, so werden wir den Operator

$$A_{k,\gamma}^{-1} f_k := \mathcal{P}^{-1}\mathcal{E}^{-1}\mathcal{F}_{\omega^\perp}^{-1}(\mathcal{M}_k^{-1}\mathcal{B}_\gamma S_k^{-1} f_k(\omega,\cdot)),\ \gamma = 2k\sqrt{1-c^2}, \tag{2.47}$$

auf das Fernfeld f_k anwenden. c ist eine zwischen 0 und 1 gewählte Konstante. Wie bereits in Abschnitt 2.5.1 erklärt, werden dadurch alle Daten $f_k(\theta,\theta')$ herausgefiltert, für die $<\theta,\omega>\leq c$ und $\omega = \frac{\theta+\theta'}{|\theta+\theta'|}$ gilt. Im Folgenden werden wir von

$$\begin{aligned} f_k(\theta,\theta') &= A_kV(\theta,\theta') + \Lambda_A(k,\theta,\theta') \\ &= -ik\mathcal{F}_{\omega^\perp}\left(\mathcal{EP}V(\omega,\cdot)\right)(k(\theta-\theta')) + \Lambda_A(k,\theta,\theta') \end{aligned}$$

ausgehen und untersuchen, wie sich Λ_A durch die Anwendung der einzelnen in (2.47) auftretenden Operatoren verändert. S_k^{-1} ist ein Sortieroperator, der angibt, wie man die Daten abtasten muss, um die einzelnen Fouriertransformationen $\mathcal{F}_{\omega^\perp}$ invertieren zu können. Es gilt $S_k^{-1}W(\omega,\xi) = W(s_k^{-1}(\omega,\xi))$, falls W eine auf $S^2 \times S^2$ definierte Funktion ist. $\mathcal{M}_k^{-1}$ entspricht einer punktweisen Multiplikation mit $\frac{i}{k}$, es gilt daher

$$\mathcal{M}_k^{-1}\mathcal{B}_\gamma S_k^{-1} f_k(\omega,\xi) = \mathcal{B}_\gamma\mathcal{F}_{\omega^\perp}\left(\mathcal{EP}V(\omega,\cdot)\right)(\xi) + \frac{i}{k}\mathcal{B}_\gamma\Lambda_A(k,s_k^{-1}(\omega,\xi)),$$

für $\xi \in \omega^\perp$. Mit $H_{\omega,\gamma}$ bezeichnen wir den hochfrequenten Anteil von $\mathcal{EP}V(\omega,\cdot)$,

$$\hat{H}_{\omega,\gamma}(\xi) = \begin{cases} \mathcal{F}_{\omega^\perp}(\mathcal{EP}V(\omega,\cdot))(\xi) & ,\quad |\xi| \geq \gamma \\ 0 & ,\quad \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.48}$$

Die Anwendung der inversen Fouriertransformation ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\omega^\perp}^{-1}\mathcal{M}_k^{-1}\mathcal{B}_\gamma S_k^{-1} f_k(\omega,b) &= \mathcal{EP}V(\omega,b) \\ &\quad \underbrace{+\frac{i}{k}\mathcal{F}_{\omega^\perp}^{-1}\mathcal{B}_\gamma\left(\Lambda_A(k,s_k^{-1}(\omega,\cdot))\right)(b) - H_{\omega,\gamma}(b)}_{=:\Lambda_F(\omega,b)} \\ &= \mathcal{EP}V(\omega,b) + \Lambda_F(\omega,b). \end{aligned}$$

Λ_F bezeichnet dabei den Fehler, der nach der inversen Fouriertransformation vorhanden ist. Da die Funktion $\mathcal{E}^{-1}$ nichtlinear ist, müssen wir sie zur weiteren

Fehleruntersuchung um den Punkt $\mathcal{EPV}(\omega, b)$ entwickeln. Allgemein suchen wir für $x, y \in \mathbb{C},\ |x| + |y| \leq 1$ eine Darstellung:

$$\mathcal{E}^{-1}(x+y) = \mathcal{E}^{-1}x + \widetilde{\mathcal{E}^{-1}}(x,y). \tag{2.49}$$

$\mathcal{E}^{-1}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{E}^{-1}z = 2ki\log(1+z).$$

Die Taylorentwicklung des Logarithmus $\log(1+\cdot)$ um den Punkt 1 liefert

$$\mathcal{E}^{-1}z = 2ki\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}z^{\nu},\text{ falls } |z| < 1.$$

Daraus erhält man mit Hilfe der binomischen Formel folgende Darstellung für $\mathcal{E}^{-1}(x+y)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{-1}(x+y) &= 2ki\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}(x+y)^{\nu} \\
&= 2ki\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\nu}{j}x^j y^{\nu-j} \\
&= \underbrace{2ki\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}x^{\nu}}_{=\mathcal{E}^{-1}x} + \underbrace{2ki\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}\sum_{j=0}^{\nu-1}\binom{\nu}{j}x^j y^{\nu-j}}_{=:\widetilde{\mathcal{E}^{-1}}(x,y)} \\
&= \mathcal{E}^{-1}x + \widetilde{\mathcal{E}^{-1}}(x,y).
\end{aligned}$$

Diese Aufspaltung gilt auf jeden Fall, wenn $|x|+|y| < 1$. Ist y sehr klein, so ergibt sich:

$$\widetilde{\mathcal{E}^{-1}}(x,y) \approx 2ki\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}\nu x^{\nu-1}y = 2ki\frac{y}{1+x},\text{ da } |x| < 1.$$

Es gilt in diesem Fall also:

$$\mathcal{E}^{-1}(x+y) \approx \mathcal{E}^{-1}x + 2ki\frac{y}{1+x}. \tag{2.50}$$

Formel (2.50) erhält man auch direkt, wenn man die Taylorentwicklung von $\mathcal{E}^{-1}$ um den Punkt x nach dem ersten Glied abbricht. Nun erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}A_{k,\gamma}^{-1}f_k(\omega,b) &= \mathcal{E}^{-1}\mathcal{F}_{\omega^{\perp}}^{-1}\mathcal{M}_k^{-1}\mathcal{B}_{\gamma}S_k^{-1}f_k(\omega,b) \\
&= \mathcal{PV}(\omega,b) + \underbrace{\widetilde{\mathcal{E}^{-1}}(\mathcal{EPV}(\omega,b),\Lambda_F(\omega,b))}_{=:\Lambda_{\mathcal{E}}(\omega,b)} \\
&= \mathcal{PV}(\omega,b) + \Lambda_{\mathcal{E}}(\omega,b).
\end{aligned}$$

$\Lambda_{\mathcal{E}}$ ist der Fehler, der nach der Anwendung des Logarithmus besteht. Zuletzt ist noch zu untersuchen, wie sich dieser Fehler durch Anwendung der inversen Röntgentransformation verstärkt. Allerdings darf man nicht davon ausgehen, dass der Fehlerterm $\Lambda_{\mathcal{E}}$ im Bild der Röntgentransformation liegt. Es ist auch nicht klar, wie sich dieser Fehler durch Anwendung einer inversen Röntgentransformation verstärkt, und bzgl. welcher Norm es für diese Verstärkung eine sinnvolle Abschätzung gibt. Invertiert man die Eikonalapproximation numerisch, so wird man diese Schwierigkeiten durch eine Regularisierung lösen.

Nun soll der Fehler untersucht werden, der durch die Diskretisierung entsteht. Dazu nimmt man an, dass die Eikonalapproximation für das gegebene Potential V exakt ist, d.h. die gemäß der Eikonalapproximation berechnete Approximation A_kV stimmt mit dem tatsächlich entstehenden Fernfeld f_k überein. Zuerst betrachtet man eine tiefpassgefilterte Version $\mathcal{B}_\gamma S_k^{-1}A_kV$, $0 \leq \gamma \leq 2k$ von $S_k^{-1}A_kV$, (vgl. (2.47)). Danach wird man eine diskrete Version $A_{k,D}^{-1}$ der inversen Eikonalapproximation auf die Lösung $\mathcal{B}_\gamma S_k^{-1}A_kV$ des Vorwärtsproblems anwenden,

$$A_{k,D}^{-1} := \mathcal{P}_D^{-1}\mathcal{E}^{-1}\mathcal{F}_{\omega^\perp,D}^{-1}\mathcal{M}_k^{-1}.$$

Der Index D soll andeuten, dass sowohl Röntgentransformation als auch Fouriertransformation diskret invertiert werden, während $\mathcal{M}_k$ und $\mathcal{E}$ exakt invertiert werden. $\mathcal{F}_{\omega^\perp,D}^{-1}$ ist die diskrete inverse Fouriertransformation,

$$\mathcal{F}_{\omega^\perp,D}^{-1}\hat{f}_\omega(b) := \frac{1}{2\pi}h^2 \sum_{|m|\leq\frac{\gamma}{h}} \hat{f}_\omega(hm)e^{ih<b,m>}.$$

Wie in (2.48) sei $H_{\omega,\gamma}$ der hochfrequente Anteil von $\mathcal{E}\mathcal{P}V(\omega,\cdot)$ und es gilt

$$\mathcal{F}_{\omega^\perp}\mathcal{E}\mathcal{P}V(\omega,\xi) = \mathcal{B}_\gamma\mathcal{F}_{\omega^\perp}\left(\mathcal{E}\mathcal{P}V(\omega,\xi)\right) + \hat{H}_{\omega,\gamma}(\xi)$$

und

$$\mathcal{F}_{\omega^\perp}\mathcal{E}\mathcal{P}V(\omega,\xi) = \mathcal{M}_k^{-1}\mathcal{B}_\gamma^{-1}\mathcal{B}_\gamma S_k^{-1}A_kV(\omega,\xi).$$

Um die Übersicht zu verbessern, werden wir die meisten Zwischenergebnisse in dieser Rechnung speziell benennen. Zuerst definieren wir

$$\hat{f}_\omega(\xi) := \mathcal{B}_\gamma\mathcal{F}_{\omega^\perp}\left(\mathcal{E}\mathcal{P}V(\omega,\xi)\right).$$

Wir erhalten

$$\mathcal{F}_{\omega^\perp}\mathcal{E}\mathcal{P}V(\omega,\xi) = \hat{f}_\omega(\xi) + \hat{H}_{\omega,\gamma}(\xi). \tag{2.51}$$

Für die diskrete inverse Fouriertransformation mit Schrittweite h gilt folgende Fehlerdarstellung: (vgl. (1.31))

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\omega^\perp}^{-1}\hat{f}_\omega(b) = f_\omega(b) &= \frac{1}{2\pi}h^2 \sum_{m\in\mathbb{Z}^2} \hat{f}_\omega(hm)e^{ih<b,m>} - \sum_{l\neq 0} f_\omega(b - \frac{2\pi}{h}l) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi}h^2 \sum_{|m|\leq\frac{\gamma}{h}} \hat{f}_\omega(hm)e^{ih<b,m>}}_{=\mathcal{F}_{\omega^\perp,D}^{-1}\hat{f}_\omega(b)} - \sum_{l\neq 0} f_\omega(b - \frac{2\pi}{h}l). \qquad (2.52)\end{aligned}$$

Die Summe über $m \in \mathbb{Z}^2$ ist deshalb gleich $\mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp,D}\hat{f}_\omega(b)$, da der Träger von $\hat{f}_\omega$ die Kreisscheibe um 0 mit Radius γ ist. Wendet man die inverse Fouriertransformation auf beide Seiten von Gleichung (2.51) an, und berücksichtigt man (2.52), so ergibt sich für $\mathcal{EP}V(\omega,b) = \mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp}\mathcal{M}_k^{-1}\mathcal{B}_\gamma^{-1}\mathcal{B}_\gamma S_k^{-1}A_kV(\omega,b)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{EP}V(\omega,b) &= \mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp}\hat{f}_\omega(b) + H_{\omega,\gamma}(b) \\
&= \mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp,D}\hat{f}_\omega(b) + \underbrace{H_{\omega,\gamma}(b) - \sum_{l\neq 0} f_\omega(b-\frac{2\pi}{h}l)}_{=:\Lambda_{F,D}(\omega,b)} \\
&= \mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp,D}\hat{f}_\omega(b) + \Lambda_{F,D}(\omega,b). \qquad (2.53)
\end{aligned}$$

$\Lambda_{F,D}(\omega,b)$ ist wieder der Fehler, der nach der diskreten inversen Fouriertransformation besteht. Spaltet man nun wieder den Logarithmus $\mathcal{E}^{-1}$ gemäß Formel (2.49) auf, so ergibt für $\mathcal{P}V(\omega,b) = \mathcal{E}^{-1}\mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp}\mathcal{M}_k^{-1}\mathcal{B}_\gamma^{-1}\mathcal{B}_\gamma S_k^{-1}A_kV(\omega,b)$, indem man $\mathcal{E}^{-1}$ auf (2.53) anwendet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}V(\omega,b) &= \mathcal{E}^{-1}\left(\mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp,D}\hat{f}_\omega(b) + \Lambda_{F,D}(\omega,b)\right) \\
&= \mathcal{E}^{-1}\mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp,D}\hat{f}_\omega(b) + \underbrace{\widetilde{\mathcal{E}^{-1}}\left(\mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp,D}\hat{f}_\omega(b), \Lambda_{F,D}(\omega,b)\right)}_{=:\Lambda_{\mathcal{E}}(\omega,b)} \\
&= \mathcal{E}^{-1}\mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp,D}\hat{f}_\omega(b) + \Lambda_{\mathcal{E}}(\omega,b).
\end{aligned}$$

$\Lambda_{\mathcal{E}}(\omega,b)$ ist der Fehler, der nach der Anwendung des Logarithmus besteht. Schließlich ergibt sich durch Anwendung der diskreten inversen Röntgentransformation $\mathcal{P}_D^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_D^{-1}\mathcal{P}V &= \underbrace{\mathcal{P}_D^{-1}\mathcal{E}^{-1}\mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp,D}\hat{f}_\omega}_{=A_{k,D}^{-1}A_kV} + \mathcal{P}_D^{-1}\Lambda_{\mathcal{E}} \\
&= A_{k,D}^{-1}A_kV + \mathcal{P}_D^{-1}\Lambda_{\mathcal{E}}.
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
V &= \mathcal{P}_D^{-1}\mathcal{P}V + (\mathcal{P}^{-1} - \mathcal{P}_D^{-1})\mathcal{P}V \\
&= A_{k,D}^{-1}A_kV + \underbrace{\mathcal{P}_D^{-1}\Lambda_{\mathcal{E}}}_{=:\Lambda_{P,T}} + \underbrace{(\mathcal{P}^{-1} - \mathcal{P}_D^{-1})\mathcal{P}V}_{=:\Lambda_{P,D}} \\
&= A_{k,D}^{-1}A_kV + \Lambda_{P,D} + \Lambda_{P,T}.
\end{aligned}$$

$\Lambda_{P,D}$ ist der Fehler, der durch die Diskretisierung der Röntgentransformation entsteht. Er ist im zweidimensionalen Fall bereits in [11] genauer untersucht worden, falls man $\mathcal{P}_D^{-1}$ durch eine gefilterte Rückprojektion realisiert. In diesem Fall wird $\Lambda_{P,D}$ genügend klein, wenn die Daten zur numerischen Inversion der Röntgentransformation in einer geeigneten Messgeometrie zur Verfügung stehen. Die Sätze, die den Fehler $\Lambda_{P,D}$ beschreiben, sind in Abschnitt 1.3 angegeben worden. $\Lambda_{P,T}$ stellt die Verstärkung des Fehlers $\Lambda_{\mathcal{E}}$ durch die (diskrete) inverse Röntgentransformation dar.

2.6 Ein Ansatz zur Lösung eines zweidimensionalen inversen Mediumproblems

Wie bisher wird das Potential V mit einer einfallenden Welle u_θ^i bestrahlt und aus dem dabei entstehenden Fernfeld f wird man versuchen, das Potential V zu berechnen. Allerdings betrachten wir nun den zweidimensionalen Fall. Dazu nehmen wir an, dass das Potential V nicht von der x_3-Komponente abhängt, d.h.

$$V\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \tilde{V}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

mit einer auf $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion $\tilde{V}$.

Weiter sei die Richtung θ des einfallenden Feldes aus der x_1-x_2-Ebene gewählt, d.h. $\theta \in S^1 \subset S^2$. Auch das Fernfeld $f_k(\theta, \theta')$ soll nur für solche θ', die in der x_1-x_2-Ebene liegen bekannt sein. Die Translation von u_θ in Richtung der dritten Komponente von x definieren wir durch

$$T^z u_\theta(x) := u_\theta(x - ze_3),\ \ z \in \mathbb{R},$$

wobei e_3 der Einheitsvektor in Richtung der x_3-Komponente sei. Da sowohl V als auch u_θ^i invariant unter Verschiebungen in e_3-Richtung sind, sind u_θ und $T^z u_\theta$ beide Lösungen der Lippmann-Schwinger-Gleichung , sie müssen also identisch sein. u_θ ist also invariant unter Verschiebungen in e_3-Richtung, und man kann u_θ in der Form

$$u_\theta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \tilde{u_\theta}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \tag{2.54}$$

mit einer auf $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion $\tilde{u_\theta}$ schreiben. Allerdings ist die Gültigkeit der Lippmann-Schwinger-Gleichung nur dann gesichert, wenn das Potential V kompakten Träger hat. Weiterhin muss für ein V, das die oben beschriebene Gestalt hat, noch nicht einmal das Integral in der Lippmann-Schwinger-Gleichung konvergieren. Deshalb dienen die obigen Überlegungen nur dazu die weitere Vorgehensweise in diesem Abschnitt plausibel zu machen.

Da das Potential V kompakten Träger hat, gehen wir von nun ab davon aus, dass V ein Zylinder

$$V\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} \tilde{V}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & , \quad |x_3| \leq h \\ 0 & , \quad |x_3| > h \end{cases} \tag{2.55}$$

der Höhe h ist. Ist das Fernfeld $f_k(\theta, \theta')$ nur für θ und θ' aus der x_1-x_2-Ebene bekannt, so werden wir im Folgenden davon ausgehen, dass V die Form (2.55) und u_θ die Form (2.54) hat.

u_θ ist Lösung der Helmholtz-Gleichung im $\mathbb{R}^3$,

$$Vu_\theta(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u_\theta + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u_\theta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}u_\theta\right)(x) + k^2 u_\theta(x), \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},$$

wobei $|x_3| \leq h$ gilt. Wegen (2.54) und (2.55) ist $\tilde{u_\theta}$ Lösung der Helmholtz-Gleichung im $\mathbb{R}^2$,

$$\tilde{V}(x)\tilde{u}_\theta(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + k^2\right)\tilde{u}_\theta(x), \; x \in \mathbb{R}^2.$$

Das Feld $\tilde{u_\theta}$ ist also Lösung des <u>zweidimensionalen direkten Streuproblems</u>.

Hat man umgekehrt die Lösung $\tilde{u_\theta}$ eines zweidimensionalen direkten Streuproblems gegeben, und will man das Potential $\tilde{V}$ berechnen, so kann man $\tilde{V}$ gemäß (2.55) als Zylinder der Höhe h betrachten. Setzt man den Ansatz (2.55) in die Eikonalapproximation ein, so erhält man

$$\begin{aligned} A_k V(\theta, \theta') &= -\frac{ik}{2\pi}\int_{\omega^\perp} e^{-ik<\theta-\theta', b>}\mathcal{E}\mathcal{P}V(\omega, b)\,db \\ &= -\frac{ik}{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{\omega^\perp\cap E} e^{-ik<\theta-\theta', b+ze_3>}\mathcal{E}\mathcal{P}V(\omega, b+ze_3)\,db\,dz \\ &= \frac{ik}{2\pi}h\int_{\omega^\perp\cap E} e^{-ik<\theta-\theta', b>}\mathcal{E}\mathcal{P}\tilde{V}(\omega, b)\,db, \end{aligned} \tag{2.56}$$

wobei E die x_1-x_2-Ebene sei.

Man kann nun das zu $\tilde{u_\theta}$ gehörige Fernfeld anstelle von $A_kV(\theta, \theta')$ einsetzen, und daraus $\tilde{V}$ berechnen. Das Problem bei dieser Vorgehensweise liegt darin, dass man dabei durch die Höhe h des Zylinders V dividieren muss, und man kann h nicht bestimmen, wenn das Fernfeld nur in der x_1-x_2-Ebene bekannt ist.

Würde A_kV in (2.56) linear von $\tilde{V}$ abhängen, so könnte man wenigstens ein Vielfaches von $\tilde{V}$ gemäß (2.56) aus A_kV bestimmen. Da aber der Operator $\mathcal{E}$ nichtlinear ist, ist dies nicht möglich. In dieser Form kann man die Eikonalapproximation also nicht zur Lösung eines zweidimensionalen inversen Mediumproblems einsetzen.

Der nächste Ansatz, die Eikonalapproximation zur Lösung eines zweidimensionalen inversen Mediumproblems einzusetzen, besteht darin, das Nahfeld u_θ nur in einer Ebene durch Gleichung (2.7) zu approximieren. Wir nehmen an, u_θ sei Lösung des zweidimensionalen direkten Streuproblems und bestimmen dann das zugehörige zweidimensionale Fernfeld. Seien also $\theta, \omega \in S^1$, $b \in \omega^\perp \cap\ E$ und $\rho \in \mathbb{R}$. Die Approximation (2.7) lautete

$$u_\theta(b+\rho\omega) \approx u_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega) = e^{ik<b+\rho\omega,\theta>} \cdot e^{-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho} V(b+r\omega)\,dr}. \tag{2.57}$$

Im $\mathbb{R}^2$ hat das gestreute Feld folgende asymptotische Entwicklung, (vgl. [2]),

$$u_\theta^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} f\left(k,\theta,\frac{x}{|x|}\right) + O\left(\frac{1}{|x|^{3/2}}\right),\ |x| \to \infty.$$

Die Lippmann-Schwinger-Gleichung im zweidimensionalen Fall lautet

$$u_\theta(x) = u_\theta^i(x) - \frac{i}{4}\int_{\mathbb{R}^2} H_0^{(1)}(k|x-y|)V(y)u_\theta(y)\,dy.$$

Wie in Abschnitt 1.1 kann man mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung der Hankel-Transformation $H_0^{(1)}$, (vgl. [2]),

$$H_0^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z-\pi/4)}\left(1 + O(|z|^{-1}\right),\ |z| \to \infty,$$

und der Entwicklung

$$|x-y| = |x| - <\hat{x}, y> + O(|x|^{-1}),\ |x| \to \infty$$

das Fernfeld explizit angeben. Man erhält

$$u_\theta^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}}\left(-i\sqrt{\frac{1}{8\pi k}} e^{-i\pi/4}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ik<\hat{x},y>} V(y)u_\theta(y)\,dy\right) + O(|x|^{-3/2}).$$

Für das Fernfeld gilt damit

$$f(k,\theta,\theta') = -i\sqrt{\frac{1}{8\pi k}} e^{-i\frac{\pi}{4}}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ik<\hat{x},y>} V(y)u_\theta(y)\,dy. \tag{2.58}$$

Setzt man (2.57) in (2.58) ein, so ergibt sich exakt wie in Abschnitt 2.1.1 mit Fubini wegen $<\theta-\theta',\omega>=0$

$$\begin{aligned} f_k(\theta,\theta') \approx -i\sqrt{\frac{1}{8\pi k}} e^{-i\frac{\pi}{4}} & \int_{\omega^\perp \cap E} e^{-ik<\theta-\theta',b>} \\ & \cdot \int_{\mathbb{R}} V(b+\rho\omega) \cdot \exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho} V(b+r\omega)\,dr\right)\,d\rho\,db. \end{aligned}$$

Das innere Integral lässt sich wie in Abschnitt 2.1.1 auswerten,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} V(b+\rho\omega)\cdot \exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho} V(b+r\omega)\,dr\right)\,d\rho \\
=&\ 2ki\left(\exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{\mathbb{R}} V(b+r\omega)\,dr\right)-1\right).
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir die gesuchte Approximation

$$\begin{aligned}
f_k(\theta,\theta') &\approx e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\omega^\perp\cap E} e^{-ik<\theta-\theta',b>}\left(\exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{\mathbb{R}} V(b+r\omega)\,dr\right)-1\right)db \\
&= \sqrt{k}e^{-i\frac{\pi}{4}}\widehat{\mathcal{E}\mathcal{P}V}(\omega,k(\theta-\theta')).
\end{aligned}$$

Man kann deshalb eine zweidimensionale Version der Eikonalapproximation durch

$$A_{k,2}V(\theta,\theta') := \sqrt{k}e^{-i\frac{\pi}{4}}\widehat{\mathcal{E}\mathcal{P}V}(\omega,k(\theta-\theta')) \tag{2.59}$$

definieren. Die Bezeichnungen in (2.59) sind aus Abschnitt 2.2 übernommen, außer dass die Fouriertransformation hier eine eindimensionale Fouriertransformation ist.

Wie man sieht, unterscheiden sich die beiden Approximationen, die wir in diesem Abschnitt erhalten haben, nur durch eine (komplexwertige) Konstante. Ob man diese Approximationen zur Lösung eines zweidimensionalen inversen Mediumproblems einsetzen kann, wird man letztendlich numerisch untersuchen müssen.

Kapitel 3

Numerische Ergebnisse

3.1 Numerische Inversion der Eikonalapproximation

In diesem Abschnitt soll die Inversion der Eikonalapproximation anhand von numerischen Beispielen untersucht werden. Es wird die Eikonalapproximation A_kV numerisch berechnet, und untersucht, ob man nach Anwendung einer diskreten Inversionsformel auf A_kV wieder das exakte Objekt V zurückerhält. In Unterabschnitt 3.1.1 wird der dreidimensionale Fall untersucht, und in Unterabschnitt 3.1.2 wird der zweidimensionale Fall untersucht. Im zweidimensionalen Fall berechnet man die Eikonalapproximation $A_{k,2}V(\theta, \theta')$, die in Abschnitt 2.6 hergeleitet wurde, und untersucht was passiert, wenn man $A_{k,2}V$ diskret invertiert. Im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall, wird im zweidimensionalen Fall auf eine spezielle Messgeometrie eingegangen werden. Die Formeln zur Inversion der Eikonalapproximation $A_{k,2}V$ werden dazu an diese spezielle Messgeometrie angepasst, um nicht interpolieren zu müssen. Alle Berechnungen in Abschnitt 3.1 wurden mit C/C++ durchgeführt.

3.1.1 Der dreidimensionale Fall

In diesem Abschnitt soll die Inversion der Eikonalapproximation A_kV numerisch untersucht werden. Dazu berechnet man A_kV zuerst numerisch, und wendet dann eine diskrete Inversionsformel auf A_kV an. Im dreidimensionalen Fall ist es relativ schwierig, eine (realistische) Messgeometrie anzugeben, in der man das Fernfeld messen könnte. Deshalb geht man von einer hypothetischen Messgeometrie aus, in der man das Fernfeld an allen benötigten Stellen $(\theta, \theta') \in S^2 \times S^2$ zur Verfügung hat. Dies bedeutet, dass man in diesem Abschnitt die Eikonalapproximation $A_kV(\theta, \theta')$ an den Stellen berechnen wird, die man zur Anwendung einer diskreten Inversionsformel benötigt. Die Eikonalapproximation A_kV von V hat die Gestalt

$$A_k V(\theta, \theta') = -ik\widehat{\mathcal{EPV}}\left(\omega, k(\theta - \theta')\right), \ \omega = \frac{\theta + \theta'}{|\theta + \theta'|}.$$

Wegen unserer Annahme an die Messgeometrie lässt sich damit auch $\widehat{\mathcal{EPV}}(\omega, \xi)$ an allen benötigten Stellen $(\omega, \xi) \in T$ mit $|\xi| \leq 2k$ aus den bekannten Daten $A_k V(\theta, \theta')$ berechnen. Wir werden uns in diesem Abschnitt also darauf beschränken, zu untersuchen wie man das Objekt V aus $\mathcal{B}_{2k}\mathcal{FEPV}$ berechnen kann, wobei wir die Messgeometrie verwenden, die zur Inversion der einzelnen Operatoren am "bequemsten" ist.

Die Ergebnisse in diesem Abschnitt werden zeigen, dass es zumindest für die in diesem Abschnitt untersuchten Objekte V von der Wellenzahl k abhängt, ob man V numerisch aus $A_k V$ rekonstruieren kann. Wir werden sehen, dass die Differenz zwischen der berechneten Rekonstruktion und dem exakten V im Wesentlichen durch den Tiefpassfilter $\mathcal{B}_{2k}$ verursacht wird. Das Ziel ist es, das Objekt V in einzelnen jeweils parallel zur x_1-x_2-Ebene liegenden Ebenen auf einem kartesischen Gitter der Schrittweite $\frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}$, zu bestimmen.

Für festes ω ist $\hat{f}_\omega(\xi)$, $\xi \in \omega^\perp$, wie in Abschnitt 2.5.2 durch

$$\hat{f}_\omega(\xi) = \begin{cases} \widehat{\mathcal{EPV}}(\omega, \xi) & : \ |\xi| \leq 2k \\ 0 & : \ |\xi| > 2k \end{cases}$$

definiert. In den numerischen Beispielen wird $\hat{f}_\omega$ zuerst an den Stellen

$$\xi_{l_1, l_2} = \begin{pmatrix} l_1 \frac{2k}{q} \\ l_2 \frac{2k}{q} \end{pmatrix}, \ -q \leq l_1, \ l_2 < q,$$

berechnet. $\hat{f}_\omega$ ist also auf einem kartesischen Gitter mit Schrittweite $\frac{2k}{q}$ bekannt. Ist das Objekt V radialsymmetrisch (d.h. es gilt $V(x) = \tilde{V}(|x|)$), so genügt es $\hat{f}_\omega$ nur für eine feste Richtung ω an den oben genannten Stellen ξ zu berechnen. Es gilt dann (vgl. [10])

$$\hat{f}_\omega(\xi) = \int_0^\infty r J_0(r|\xi|)\chi(r)\, dr, \tag{3.1}$$

wobei χ wie in Abschnitt 2.1.2 durch

$$\chi(r) = \exp\left(-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(\sqrt{r^2 + t^2})\, dt\right) - 1$$

definiert ist. Als Beispielobjekt nehmen wir eine Kugel mit Radius $\delta = 0.5$ und Funktionswert $V = k^2 \cdot 0.125$ im Innern. Für unser Beispielobjekt kann man χ exakt berechnen. Die Hankeltransformation in (3.1) wurde mit Hilfe der summierten Trapezregel ausgerechnet.

Auf $\hat{f}_\omega$ werden nacheinander $\mathcal{F}_{\omega^\perp}^{-1}$, $\mathcal{E}^{-1}$ und $\mathcal{P}^{-1}$ angewandt, und es werden jeweils die Zwischenergebnisse mit $\mathcal{EP}V$, $\mathcal{P}V$ und V verglichen. Die Benennungen in diesem Abschnitt sind aus Abschnitt 2.5.2 entnommen.

Zuerst wird $\mathcal{EP}V(\omega,\cdot)$ an den Stellen

$$b_{m_1,m_2} = \begin{pmatrix} m_1\frac{\pi}{2k} \\ m_2\frac{\pi}{2k} \end{pmatrix}, \ -q \le m_1,\ m_2 < q$$

näherungsweise durch eine diskrete inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\omega^\perp,D}^{-1}$ berechnet,

$$\mathcal{F}_{\omega^\perp,D}^{-1}\hat{f}_\omega(b_{m_1,m_2}) := \frac{2k^2}{\pi q^2}\sum_{l_1=-q}^{q-1} e^{il_1m_1\frac{\pi}{q}}\left(\sum_{l_2=-q}^{q-1} e^{il_2m_2\frac{\pi}{q}}\hat{f}_\omega(\xi_{l_1,l_2})\right). \tag{3.2}$$

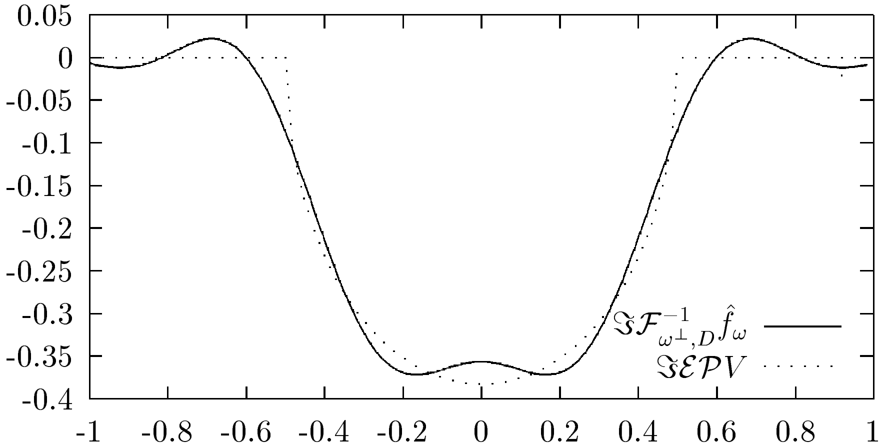
Es gilt $\mathcal{EP}V(\omega,\cdot) \approx \mathcal{F}_{\omega^\perp,D}^{-1}\hat{f}_\omega$. Die Schrittweite des Gitters, auf dem man $\mathcal{F}_{\omega^\perp,D}^{-1}\hat{f}_\omega$ berechnet, wurde deshalb $\frac{\pi}{2k}$ gewählt, da dann das Produkt der Schrittweiten im Fourier- und im Ortsraum gerade π/q ergibt. Dann wird auch die diskrete Fouriertransformation von der diskreten inversen Fouriertransformation invertiert (vgl. [6]). Sollen alle Indizes in (3.2) von 0 bis $2q-1$ laufen (z.B. ist dies bequem, wenn man in C programmiert), so kann man dies durch eine Indextransformation erreichen. Das Ergebnis, das man erhält, ist wieder eine diskrete inverse Fouriertransformation.

S^1 sei der Schnitt der Einheitssphäre S^2 mit der x_1-x_2-Ebene. Invertiert man die Fouriertransformationen $\mathcal{F}_{\omega^\perp}$ nur für diejenigen ω, die in S^1 liegen, so wird man später die Röntgentransformation "schichtweise" invertieren können, indem man nur die Werte $\mathcal{P}V(\omega,b)$ für die b berücksichtigt, die jeweils in der gleichen Schicht parallel zur x_1-x_2-Ebene liegen. Auf diese Art wird man bei der Inversion der Röntgentransformation genauso vorgehen können, wie dies in der 2D-Computertomographie üblich ist. Die Schrittweite h im Ortsraum ist mit $h=\frac{\pi}{2k}$ vergleichsweise groß, wenn die Wellenzahl k klein ist. Man kann deshalb das Objekt V mit dieser Vorgehensweise nur in bestimmten Schichten bestimmen. Liegen diese Schichten zu weit voneinander entfernt, um das Objekt graphisch darstellen zu können, oder will man eine bestimmte Schicht des Objekts bestimmen, so muss man interpolieren. Nach Anwendung der diskreten inversen Fouriertransformation hat man $\mathcal{F}_{\omega^\perp,D}^{-1}\hat{f}_\omega$ auf einem kartesischen Gitter der Schrittweite $\frac{\pi}{2k}$ gegeben. Um die gefilterte Rückprojektion in der in Abschnitt 1.3 beschriebenen Form anwenden zu können, muss man $\mathcal{P}V(\omega,\cdot)$ in der zu rekonstruierenden Schicht auf einem kartesischen Gitter der Schrittweite $\frac{1}{q}$ kennen. Wäre $2k \overset{!}{=} \pi q$, so hätte man $\mathcal{EP}V$, und damit auch $\mathcal{P}V$ an den Stellen gegeben, die man zur Anwendung einer gefilterten Rückprojektion benötigt. Im Allgemeinen wird $2k$ aber kleiner als πq sein, und man wird auch innerhalb der Schicht, die rekonstruiert wird, interpolieren müssen. Da die Funktionen $\mathcal{F}_{\omega^\perp}^{-1}(\mathcal{B}_{2k}\widehat{\mathcal{EP}V}(\omega,\cdot))$ wegen des Tiefpassfilters $\mathcal{B}_{2k}$ $2k$-bandbeschränkt sind, lässt sich die Interpolation mit Hilfe der sinc-Reihe (1.28) durchführen. Eine schnellere Interpolation kann man auch mit Hilfe der

Reihe (1.29) durchführen. Je nachdem, welche Werte man für k wählt, erhält man unterschiedliche Zwischenergebnisse nach Anwendung der inversen Fouriertransformation (+ Interpolation), was die "Qualität" dieser Zwischenergebnisse betrifft. Diese "Qualitätsunterschiede" werden durch den Tiefpassfilter B_{2k} verursacht. Vor allem die Qualität der Rekonstruktionen $A_{k,D}^{-1} A_k V$ hängt von k ab. Dies lässt sich dadurch erklären, dass sich der Fehler, der nach der inversen Fouriertransformation besteht, also die Differenz zwischen $\mathcal{F}_{\omega,D}^{-1} \hat{f}_\omega$ und $\mathcal{EP}V$, durch die Anwendung des Logarithmus und der gefilterten Rückprojektion verstärkt. Letztendlich werden die Unterschiede in der Qualität der Rekonstruktionen also durch den Tiefpassfilter $\mathcal{B}_{2k}$ verursacht.

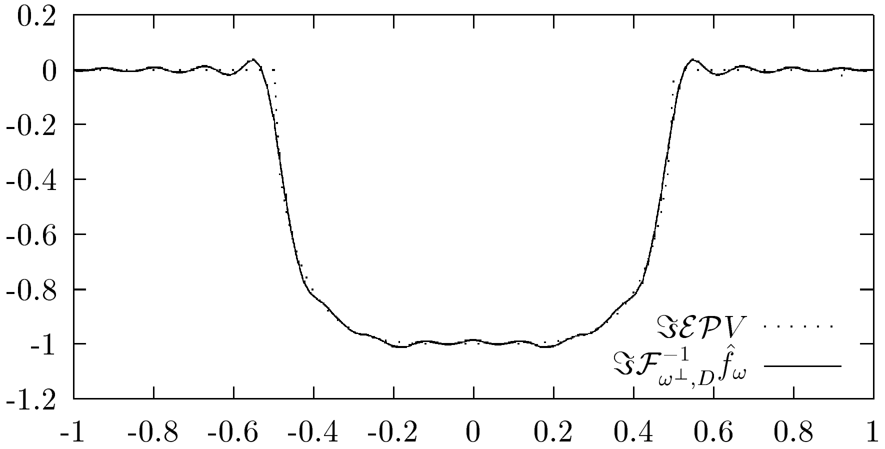
Es werden nun für eine Kugel mit Radius δ und Funktionswert im Innern der Kugel $V = k^2 \cdot 0.125$ zuerst $\mathcal{F}_{\omega^\perp,D}^{-1} \hat{f}_\omega$ und $\mathcal{EP}V$ miteinander verglichen. Als Wellenzahl wird $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ gewählt, wobei λ die Wellenlänge ist. λ nimmt die Werte $\lambda = 1.0$ und $\lambda = 0.25$ an. Da $\mathcal{F}_{\omega^\perp,D}^{-1} \hat{f}_\omega$ und $\mathcal{EP}V$ beide imaginär sind, genügt es, den Imaginärteil miteinander zu vergleichen. Da das Objekt radialsymmetrisch ist, kann man $\omega = e_2 \in S^1$ wählen, wobei e_2 der Einheitsvektor in x_2-Richtung sei. Es genügt wegen der Radialsymmetrie des Objekts, die Zwischenergebnisse auf einer Geraden (z.B. der x_1-Achse) darzustellen. Alle Diagramme in diesem Abschnitt zeigen jeweils die berechneten Zwischenergebnisse in den zur x_1-x_2-Ebene parallellen Schichten $x_3 = 0.0$, $x_3 = 0.25$, $x_3 = 0.5$ und $x_3 = 0.75$.

Zwischenergebnis nach inverser Fouriertransformation

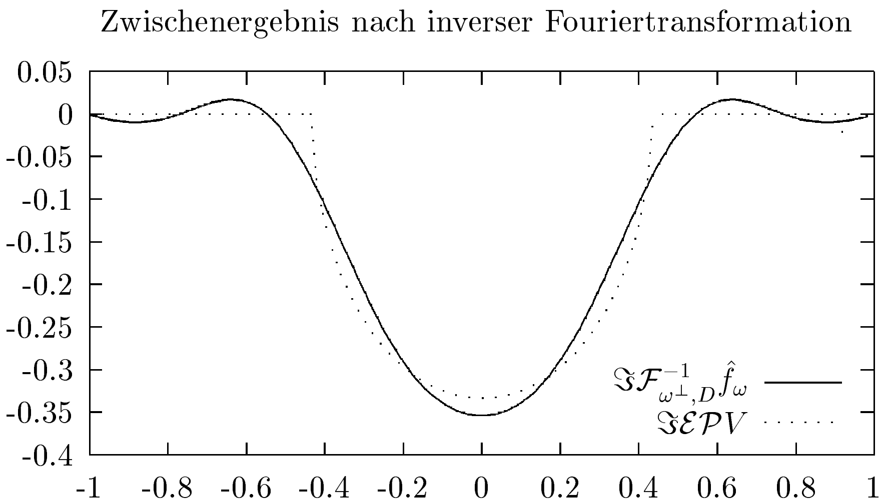


$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 1.0$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.0$

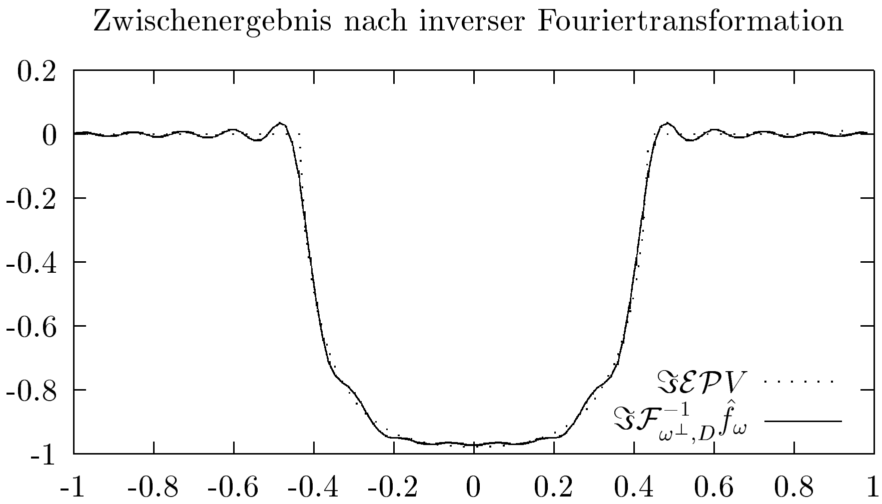
Zwischenergebnis nach inverser Fouriertransformation



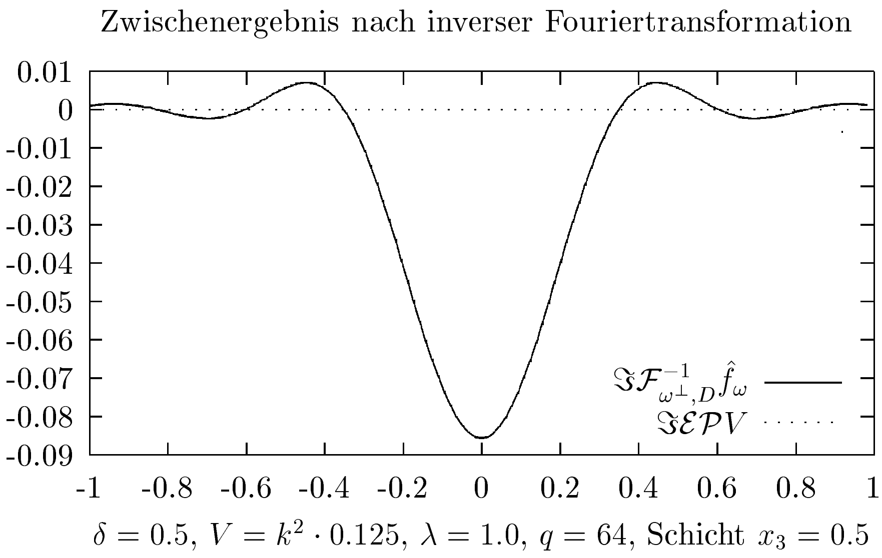
$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 0.25$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.0$

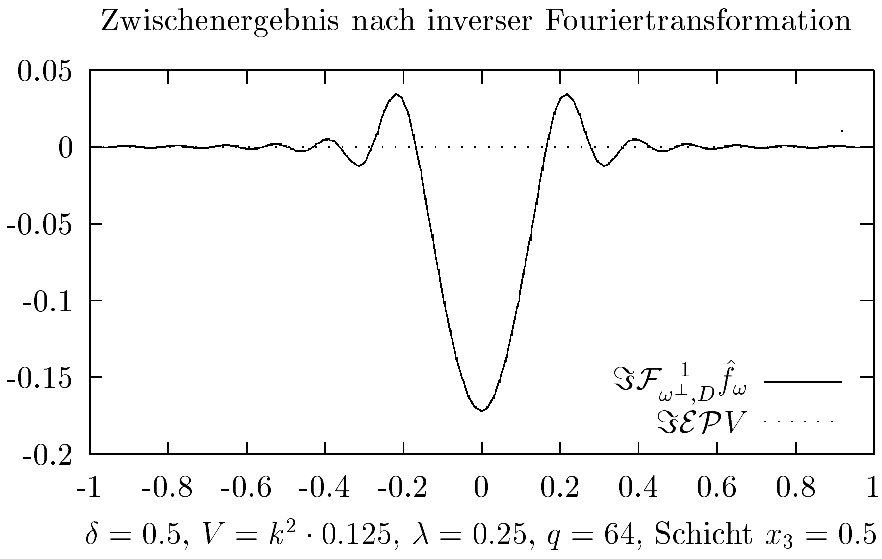


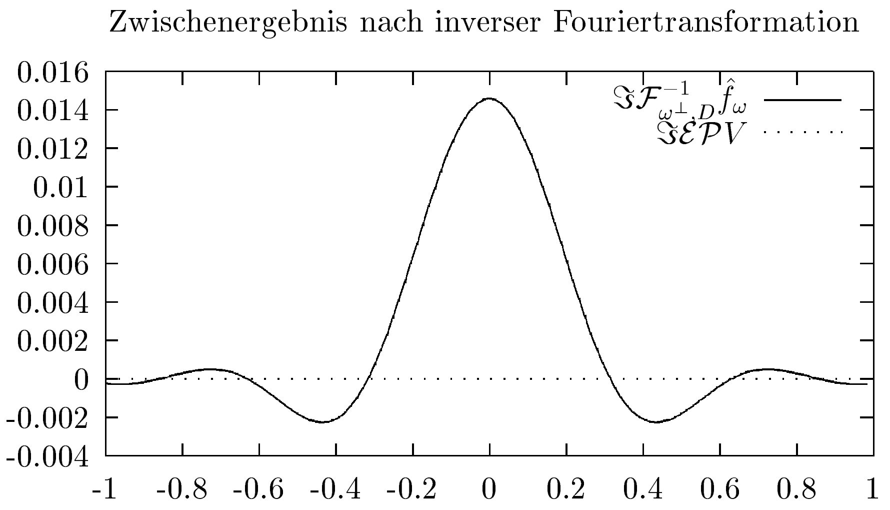
$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 1.0$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.25$



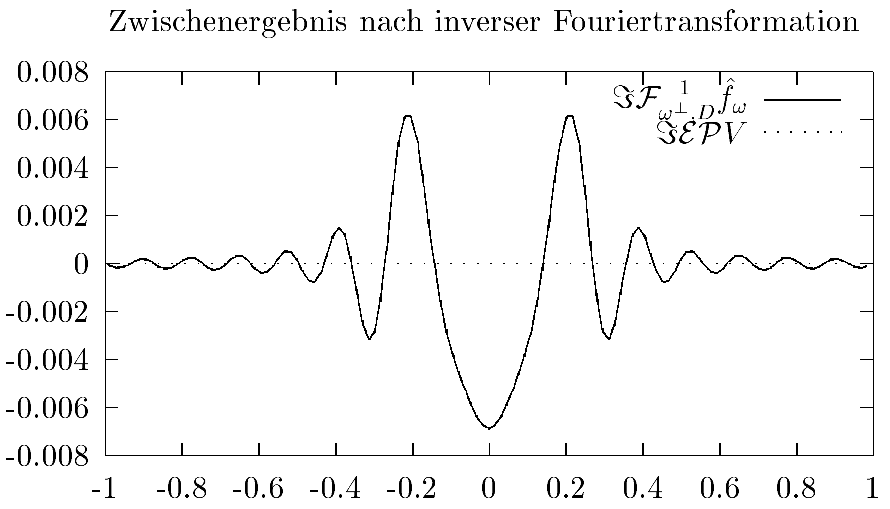
$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 0.25$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.25$


Zwischenergebnis nach inverser Fouriertransformation
0.01
0
-0.01
-0.02
-0.03
-0.04
-0.05
-0.06
-0.07
-0.08
-0.09
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
$\Im \mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp,D} \hat{f}_\omega$
$\Im \mathcal{E}\mathcal{P}V$
$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 1.0$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.5$


Zwischenergebnis nach inverser Fouriertransformation
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
$\Im \mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp,D} \hat{f}_\omega$
$\Im \mathcal{E}\mathcal{P}V$
$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 0.25$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.5$



$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 1.0$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.75$



$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 0.25$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.75$

Als Nächstes wird die Exponentialfunktion invertiert. Es gilt

$$\mathcal{E}^{-1} z = 2ki \log(1 + z).$$

Der verwendete Logarithmus ist der Hauptzweig des Logarithmus (vgl. [16]). Da die Exponentialfunktion im Komplexen periodisch mit der Periode $2\pi i$ ist, gilt die Gleichung

$$\log(\exp z) = z$$

nur für solche z, deren Imaginärteil betragsmäßig kleiner als π ist. Ansonsten gilt

$$\log(\exp z) = z + 2\pi i\, n \tag{3.3}$$

mit einer unbekannten Zahl $n \in \mathbb{Z}$. Allgemein wird also auch nicht

$$\mathcal{E}^{-1} \mathcal{E} z = z \tag{3.4}$$

gelten. Setzt man (3.3) in (3.4) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{-1}\mathcal{E}z &= 2ki\log\left(\exp\left(-\frac{i}{2k}z\right)\right) \\ &= z - 4k\pi\, n \end{aligned} \tag{3.5}$$

mit einer unbekannten Zahl $n \in \mathbb{Z}$. Die in Abschnitt 3.1 verwendeten Testobjekte $V = k^2 V_A$ sind von der Wellenzahl k abhängig. Soll

$$\mathcal{E}^{-1}\mathcal{E}\mathcal{P}V \stackrel{!}{=} \mathcal{P}V$$

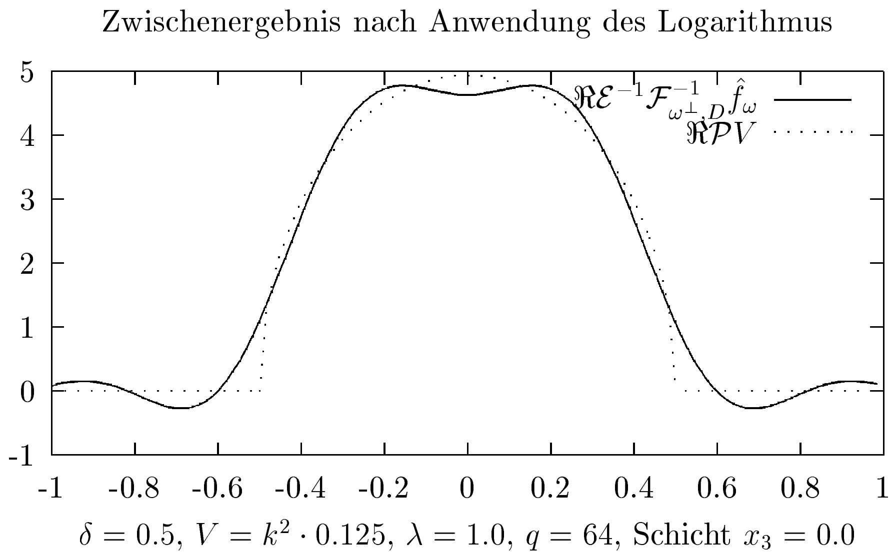
gelten, so muss die Bedingung

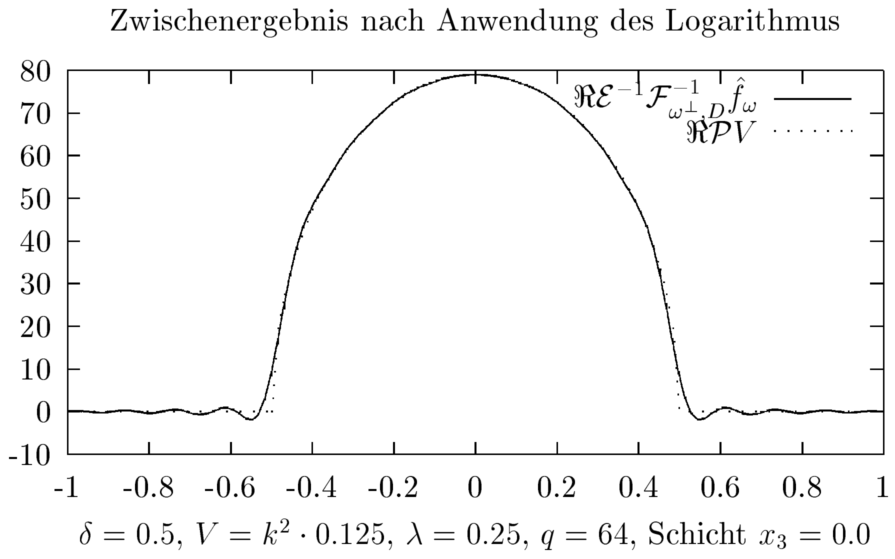
$$|\Re\mathcal{P}V| = |k^2\Re\mathcal{P}V_A| \stackrel{!}{<} 2k\pi$$

erfüllt sein. Deshalb kann es für größeres k Schwierigkeiten geben, die sich wie folgt lösen lassen.

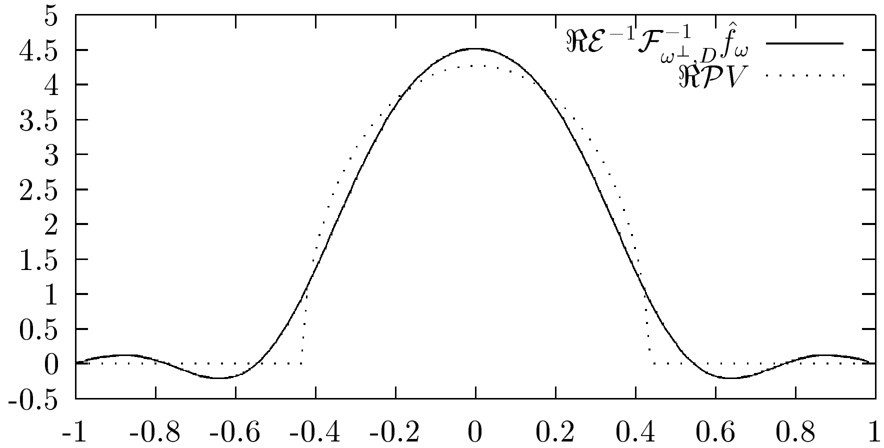
Da die Röntgentransformation als Abbildung von $H^\alpha(B_1(0))$ nach $H^{\alpha+\frac{1}{2}}(T)$ stetig ist, ist das Bild $\mathcal{P}V$ von V glatter als V selbst. Die in der Computertomographie auftretenden Objekte V sind im Allgemeinen aus dem Sobolevraum $H^\alpha(B_1(0))$ für $\alpha < \frac{1}{2}$ (vgl. [11]). α kann dabei beliebig nahe bei $\frac{1}{2}$ liegen. Das Bild $\mathcal{P}V$ von V ist also im Sobolevraum $H^\beta(T)$ mit einer Zahl $\beta < 1$, die beliebig nahe bei 1 liegen kann. Ist V radialsymmetrisch, so liegt $\mathcal{P}V(\omega,\cdot)$ wegen (1.33) in $H^\beta(\omega^\perp)$ für alle $\omega \in S^{n-1}$. Wäre $\mathcal{P}V(\omega,\cdot)$ in $H^{1+\epsilon}(\omega^\perp)$, mit einem $\epsilon > 0$, so könnte man mit Hilfe des *Sobolev'schen Einbettungssatzes* 1.11 folgern, dass $PV(\omega,\cdot)$ stetig ist. Dann könnte man jeweils für festes ω vom Rand von $\omega^\perp \cap E$ ausgehend zu jedem Wert $\mathcal{P}V(\omega, b)$, $b \in \omega^\perp \cap E$, ein geeignetes Vielfaches von $4k\pi$ addieren, so dass $\mathcal{P}V(\omega,\cdot)$ stetig wird. Dabei sei E die Ebene, in der das Objekt rekonstruiert werden soll. Da für die in dieser Arbeit numerisch untersuchten Objekte $\mathcal{P}V(\omega,\cdot)$ immer stetig ist, kann man auf die oben beschriebene Art dafür sorgen, dass durch die "Nichtinjektivität" der Exponentialfunktion kein zusätzlicher Fehler in den Rekonstruktionen auftritt.

Die folgenden Abbildungen zeigen die Zwischenergebnisse, die man nach der Anwendung von $\mathcal{E}^{-1}$ erhält, d.h. es werden $\mathcal{E}^{-1}\mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp,D}\hat{f}_\omega$ und $\mathcal{P}V$ miteinander verglichen. Dabei genügt es, die Realteile miteinander zu vergleichen. Wie zuvor, werden die Ergebnisse in einzelnen Schichten parallel zur x_1-x_2-Ebene dargestellt. Es genügt wegen der Radialsymmetrie des Objekts wieder, die Ergebnisse auf einer Geraden darzustellen.


Zwischenergebnis nach Anwendung des Logarithmus
$\Re\mathcal{E}^{-1}\mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp,D}\hat{f}_\omega$
$\Re\mathcal{P}V$
5
4
3
2
1
0
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 1.0$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.0$

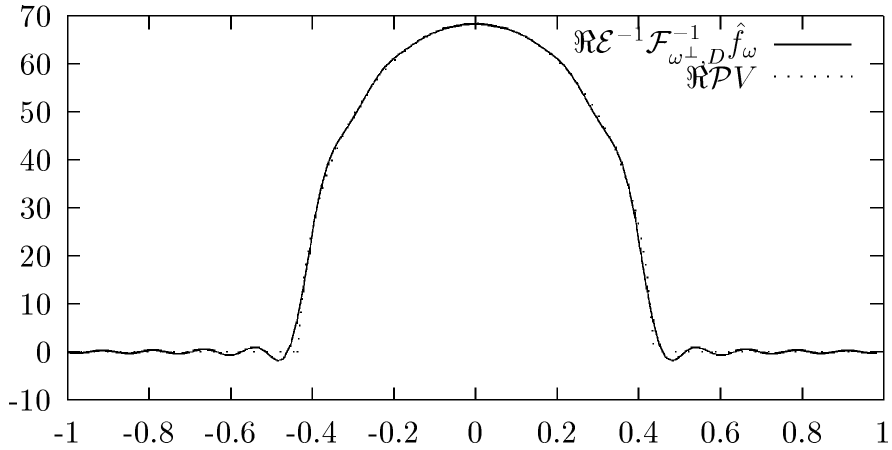

Zwischenergebnis nach Anwendung des Logarithmus
$\Re\mathcal{E}^{-1}\mathcal{F}^{-1}_{\omega^\perp,D}\hat{f}_\omega$
$\Re\mathcal{P}V$
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 0.25$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.0$

Zwischenergebnis nach Anwendung des Logarithmus



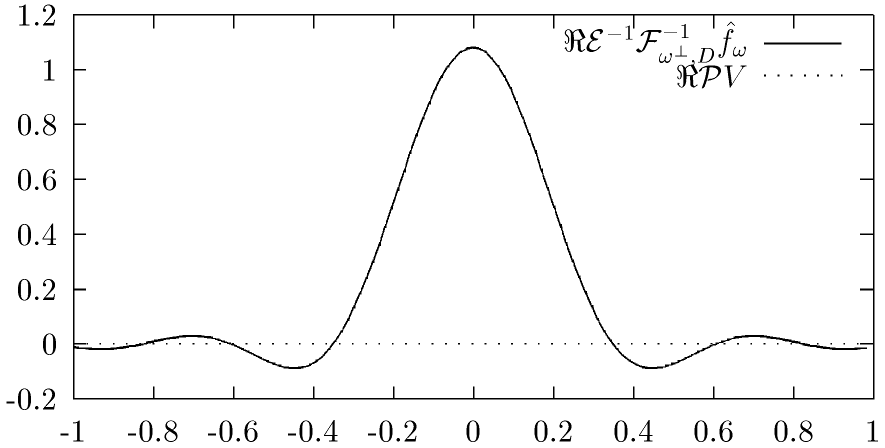
$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 1.0$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.25$

Zwischenergebnis nach Anwendung des Logarithmus



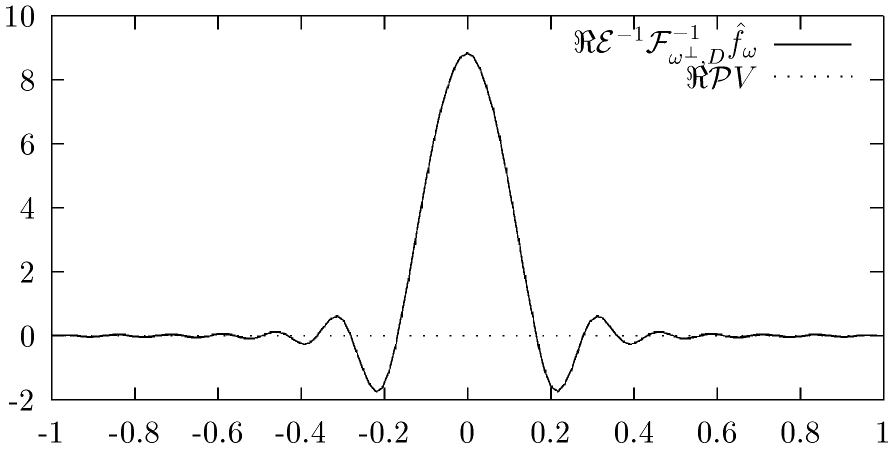
$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 0.25$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.25$

Zwischenergebnis nach Anwendung des Logarithmus

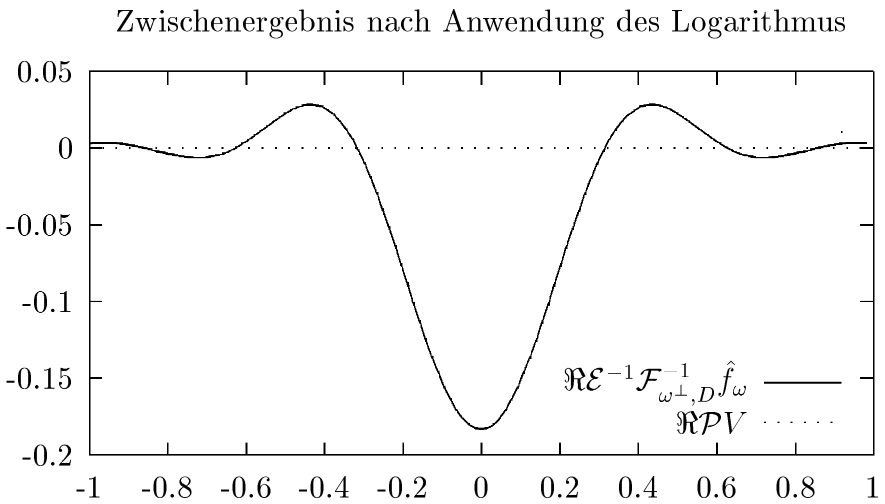


$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 1.0$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.5$

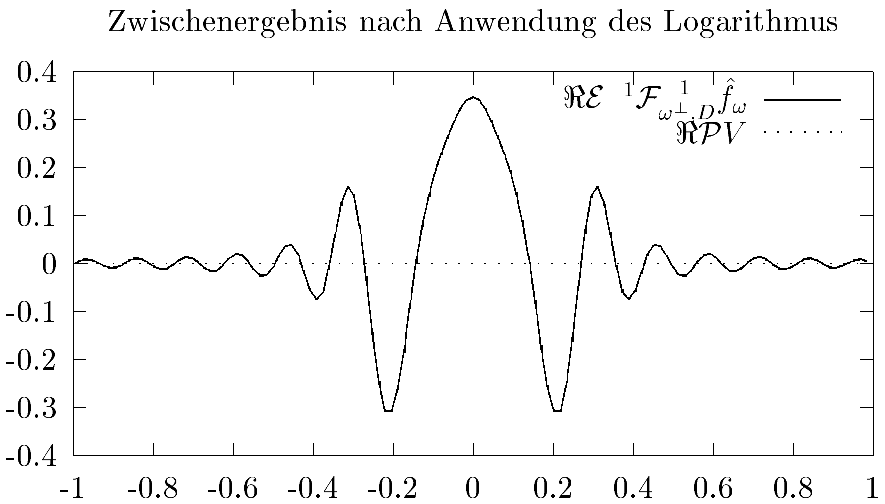
Zwischenergebnis nach Anwendung des Logarithmus



$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 0.25$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.5$



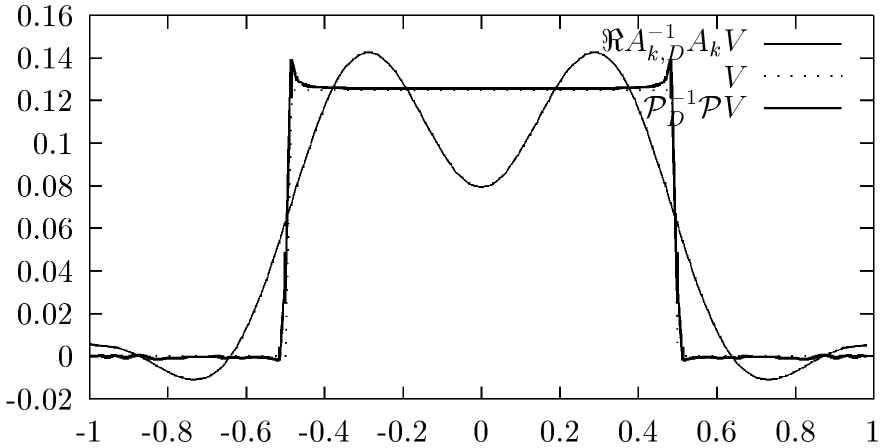
$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 1.0$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.75$



$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 0.25$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.75$

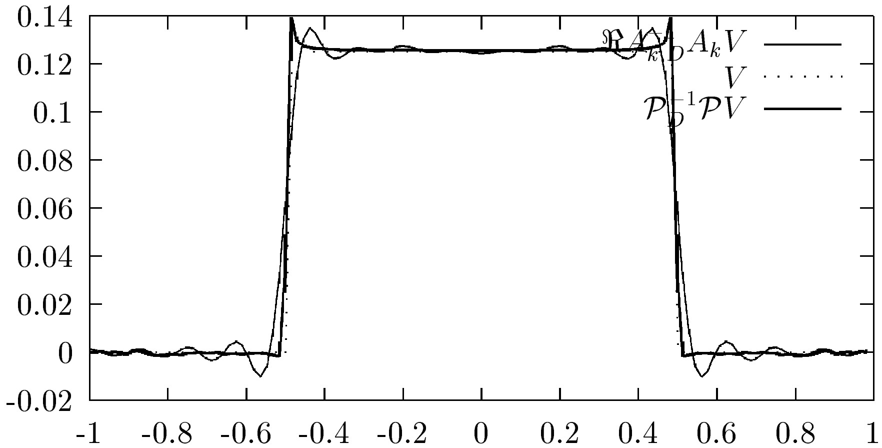
Schließlich wird die Röntgentransformation mit der Methode der *gefilterten Rückprojektion* invertiert, die in Abschnitt 1.3 beschrieben worden ist (vgl. [10], [11], [12], [13]). Die folgenden Abbildungen zeigen den Vergleich zwischen $A_{k,D}^{-1}A_kV$ und dem exakten Objekt V. $A_{k,D}^{-1}A_kV$ erhält man, wenn man die diskrete inverse Eikonalapproximation auf die Eikonalapproximation A_kV von V anwendet. In den Abbildungen ist auch $\mathcal{P}_D^{-1}\mathcal{P}V$ aufgetragen. $\mathcal{P}_D^{-1}\mathcal{P}V$ erhält man, wenn man die gefilterte Rückprojektion auf die Röntgentransformation $\mathcal{P}V$ von V anwendet. Vergleicht man die Kurven miteinander, so sieht man, dass die Differenz zwischen $\mathcal{P}_D^{-1}\mathcal{P}V$ und V vernachlässigbar ist, im Vergleich zu der Differenz zwischen $A_{k,D}^{-1}A_kV$ und V. Um die Rekonstruktionen besser miteinander vergleichen zu können, wurden die Ergebnisse durch das Quadrat der Wellenzahl k normiert.

Rekonstruktion



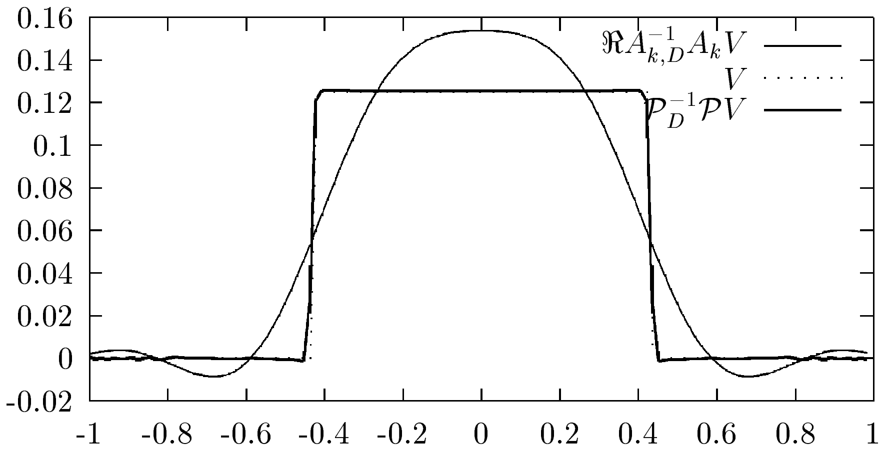
$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 1.0$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.0$

Rekonstruktion



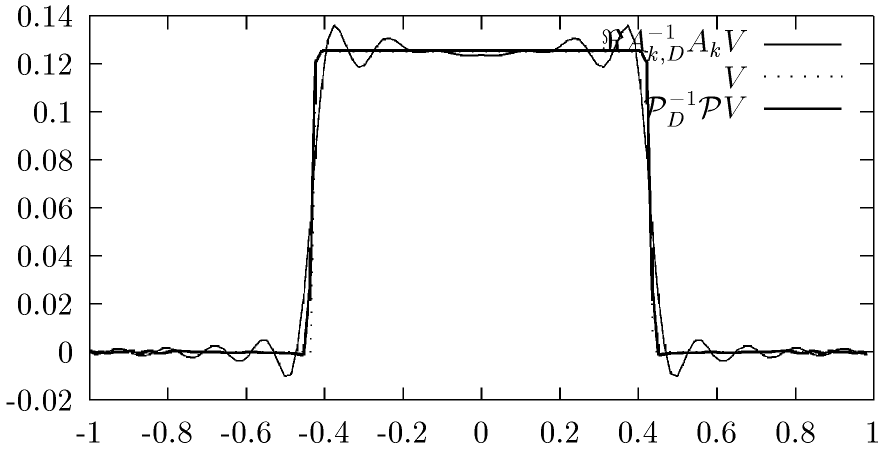
$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 0.25$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.0$

Rekonstruktion



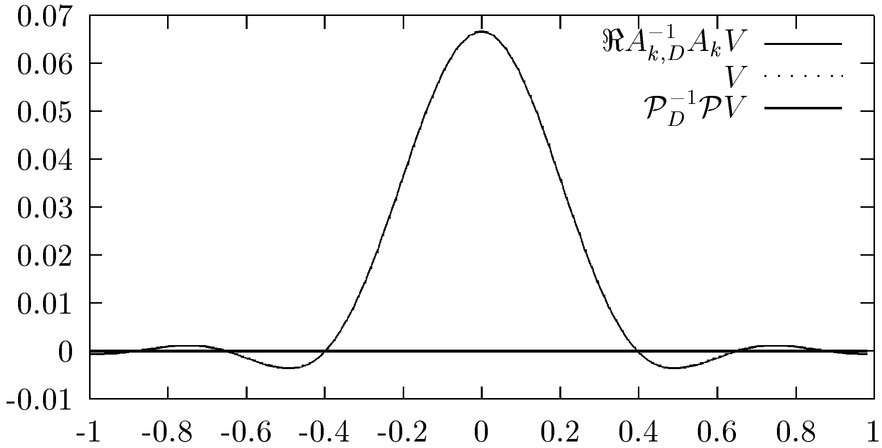
$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 1.0$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.25$

Rekonstruktion



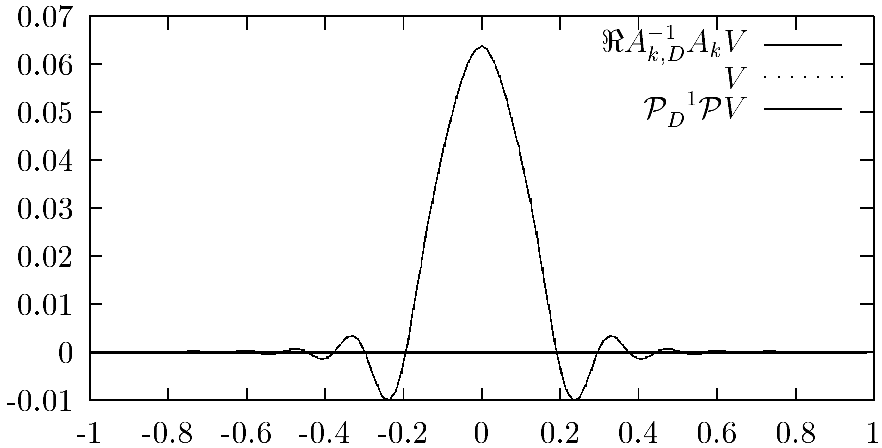
$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 0.25$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.25$

Rekonstruktion

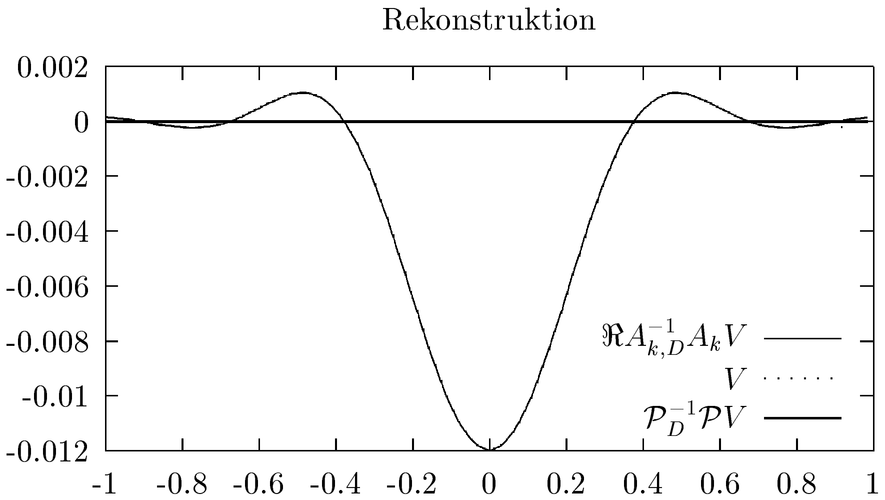


$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 1.0$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.5$

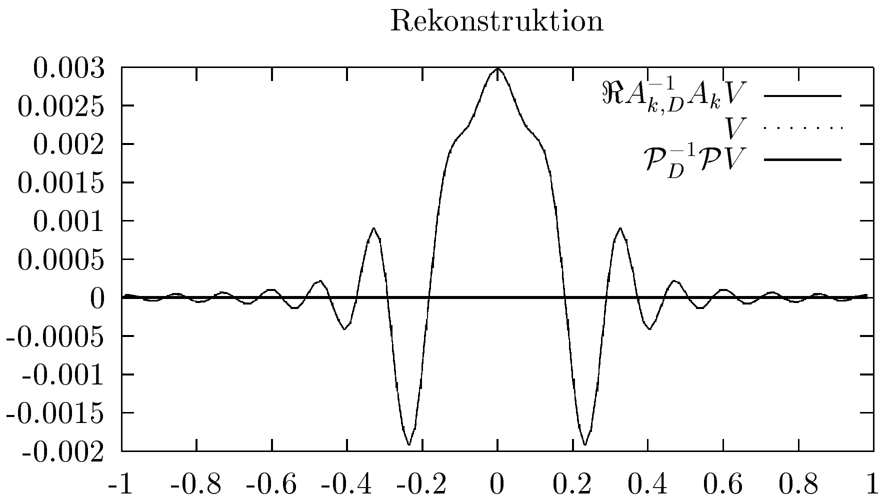
Rekonstruktion



$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 0.25$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.5$



$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 1.0$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.75$



$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.125$, $\lambda = 0.25$, $q = 64$, Schicht $x_3 = 0.75$

Wie man sieht, werden die Rekonstruktionen mit kleiner werdender Wellenlänge besser. Wählt man $\lambda = 0.125$, so beschreiben die Rekonstruktionen schon ziemlich genau das exakte Objekt. Lediglich am Rand des Objekts (Schicht $x_3 = 0.5$) kann man noch Fehler feststellen. Dies kommt daher, dass die inverse Fouriertransformation einer Funktion mit kompaktem Träger analytisch ist, und deshalb keine Sprungstelle besitzt. In der Nähe der Unstetigkeitsstelle wird das Objekt deshalb nicht exakt berechenbar sein. Weiterhin sieht man, dass die Rekonstruktionen keinen kompakten Träger im Einheitskreis besitzen, da die inverse Fouriertransformation einer bandbeschränkten Funktion keinen kompakten Träger haben kann (Schicht $x_3 = 0.75$). Allerdings sind die Werte der Rekonstruktion außerhalb des Trägers von V betragsmäßig klein, so dass sie keine große Rolle spielen.

3.1.2 Der zweidimensionale Fall

In Abschnitt 2.6 wurde beschrieben, wie man die Eikonalapproximation dazu verwenden könnte, ein zweidimensionales inverses Mediumproblem zu lösen. Die Approximation an das Fernfeld, die wir in diesem Fall erhalten haben lautet

$$A_{k,2}V(\theta,\theta') := \sqrt{\frac{k}{2\pi}}e^{-i\pi/4}\int_{\omega^\perp} e^{-ik<\theta-\theta',b>}\mathcal{EP}V(\omega,b)\,db. \tag{3.6}$$

Will man die in (3.6) auftretende Fouriertransformation mit Hilfe einer inversen FFT invertieren, so muss man die Daten $A_{k,2}V(\theta,\theta')$, bzw. das Fernfeld f_k, für jedes einzelne ω nicht äquidistant in $S^1 \times S^1$ abtasten. Hat man die Daten nicht an den gewünschten Stellen gegeben, so muss man interpolieren.

Eine Möglichkeit, dies zu tun, besteht darin, die Entwicklung (1.14) des Fernfelds nach den Kugelflächenfunktionen Y_n^m zur Interpolation zu benutzen, falls man den 3D-Fall betrachtet. Im 2D-Fall, der in diesem Abschnitt betrachtet wird, muss man die entsprechende Entwicklung des Fernfelds nach Kugelflächenfunktionen betrachten. Setzt man die bekannten Daten in (1.14) ein, so erhält man ein lineares Gleichungssystem, aus dem man die Koeffizienten b_n^m berechnen kann. Danach kann man die Werte des Fernfelds an den benötigten Stellen bestimmen, indem man die Reihe (1.14) auswertet. Lässt sich das lineare Gleichungssystem mit schnellen Verfahren lösen, so könnte sich dadurch ein effizientes numerisches Verfahren ergeben. Speziell kann man auf diese Art auch die Werte des Fernfelds an den Stellen bestimmen, die man braucht, um eine schnelle Fouriertransformation anwenden zu können.

In der Computertomographie wird eine analoge Vorgehensweise dazu benutzt, um aus den bekannten Daten solche Daten konsistent zu bestimmen, die zwar unbekannt sind, aber zur Rekonstruktion des Objekts benötigt werden. Beim 'Restricted Range Problem' entspricht das einer Extrapolation (vgl. [10],[11]).

Ist V radialsymmetrisch, so könnte man, wenn die Koeffizienten b_n^m bekannt sind, diese auch direkt in Gleichung (2.18) aus Lemma 2.4 einsetzen, und damit $\mathcal{EP}V(\omega,b)$ berechnen. Allerdings lässt sich Gleichung (2.18) nicht dazu verwenden $\mathcal{EP}V(\omega,0)$ auszurechnen, da dann beide Seiten in (2.18) verschwinden.

Da es in diesem Abschnitt darum geht, den Fehler numerisch zu bestimmen, der durch die Anwendung der Eikonalapproximation entsteht, wird dieser Ansatz hier nicht weiter verfolgt werden. Stattdessen wird das Integral (3.6) mit Hilfe einer Koordinatentransformation transformiert. Das dabei entstehende Integral lässt sich mit Hilfe der Trapezregel so durch eine Summe approximieren, dass man zur Auswertung dieser Summe die Werte $A_{k,2}V(\theta,\theta')$ nur für solche θ und θ' benötigt, die äquidistant über den Einheitskreis verteilt sind. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{EP}V(\omega,b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi b}\widehat{\mathcal{EP}V}(\omega,\xi\omega^\perp)\,d\xi \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2k}^{2k} e^{i\xi b}\widehat{\mathcal{EP}V}(\omega,\xi\omega^\perp)\,d\xi.
\end{aligned}$$

Substituiert man $\xi = 2k \sin\varphi$, so erhält man mit $d\xi = 2k\cos\varphi\, d\varphi$

$$\begin{aligned} \mathcal{EPV}(\omega, b) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2kib\sin\varphi} \cos\varphi\, \widehat{\mathcal{EPV}}(\omega, 2k\sin\varphi\omega^{\perp})\, d\varphi \\ &\overset{(3.6)}{=} \sqrt{\frac{2k}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2kib\sin\varphi} \cos\varphi A_{k,2}V(\theta(\omega-\varphi), \theta'(\omega+\varphi))d\varphi. \quad (3.7) \end{aligned}$$

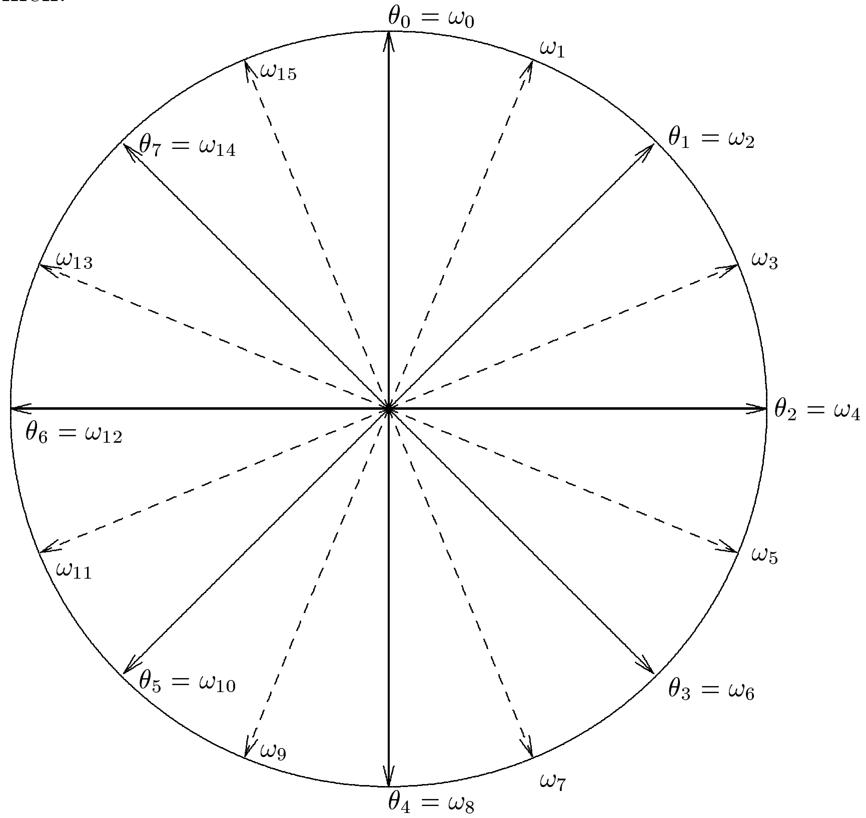
Ist α der Winkel zwischen ω und der x_1-Achse, so soll die Schreibweise $\theta(\omega-\varphi)$ andeuten, dass der Winkel zwischen θ und der x_1-Achse gleich $\alpha - \varphi$ sein soll. Analog soll der Winkel zwischen θ' und der x_1-Achse gleich $\alpha+\varphi$ sein. Die Punkte θ_{m_1}, θ_{m_2} $(0 \le m_1, m_2 < 4p)$, für die $A_{k,2}V$ bekannt sein soll, definieren wir als

$$\theta_{m_1} := \theta\left(\frac{2\pi m_1}{4p}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi m_1}{4p}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi m_1}{4p}\right) \end{pmatrix}, \quad \theta'_{m_2} := \theta'\left(\frac{2\pi m_2}{4p}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi m_2}{4p}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi m_2}{4p}\right) \end{pmatrix}.$$

ω_m $(0 \le m < 8p)$ ist definiert durch

$$\omega_m := \omega\left(\frac{\pi m}{4p}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi m}{4p}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi m}{4p}\right) \end{pmatrix}.$$

Die Bezeichnungen werden am Beispiel $p = 2$ illustriert. Die gestrichenen Linien sind diejenigen ω, die nicht mit der Richtung θ eines einfallenden Feldes übereinstimmen.



In den numerischen Beispielen wird $4p$ die Anzahl der einfallenden ebenen Wellen, d.h. die Anzahl der verschiedenen Messungen sein.

Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich aus (3.6)

$$A_{k,2}V(\theta_{m-j}, \theta'_{m+j}) = \sqrt{k}e^{-i\pi/4}\widehat{\mathcal{EP}V}(\omega_{2m}, 2k\sin(\frac{\pi j}{2p})\omega_{2m}^{\perp}), \ -p \leq j \leq p,$$

bzw.

$$A_{k,2}V(\theta_{m-j}, \theta'_{m+j-1}) = \sqrt{k}e^{-i\pi/4}\widehat{\mathcal{EP}V}(\omega_{2m-1}, 2k\sin(\frac{(2j-1)\pi}{4p})\omega_{2m-1}^{\perp}),$$

für $-p+1 \leq j \leq p$. Wendet man die Trapezregel mit Schrittweite $\frac{\pi}{2p}$ auf (3.7) an, so erhält man

$$\mathcal{EP}V(\omega_{2m}, l/q) \approx \sqrt{\frac{\pi k}{2}}\frac{e^{i\pi/4}}{p}\sum_{j=-p+1}^{p-1} e^{2kil/q\sin(\frac{\pi j}{2p})}\cos(\frac{\pi j}{2p})A_{k,2}V(\theta_{m-j}, \theta'_{m+j}), \tag{3.8}$$

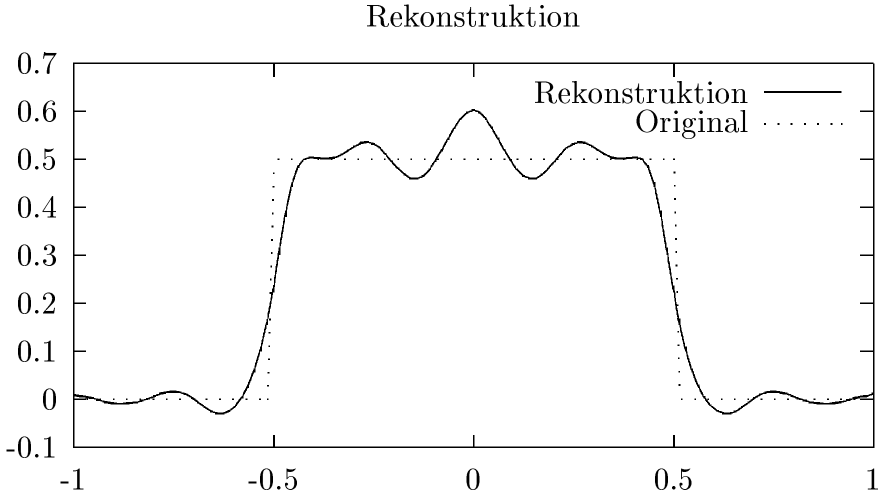
wobei $0 \leq m < 4p$ gilt. Wegen $\cos(\pi/2) = \cos(-\pi/2) = 0$ verschwinden die Randterme $j = -p$ und $j = p$. Wir Indizieren θ und θ' in (3.8) modulo $4p$, d.h. ist $m - j$ in (3.8) kleiner als 0, so ersetzen wir $m - j$ durch $m - j + 4p$, und falls $m + j \geq 4p$ ist, so ersetzen wir $m + j$ durch $m + j - 4p$. Dies entspricht der zyklischen Anordnung der θ und der θ' über den Einheitskreis.

Für $\mathcal{EP}V(\omega_{2m-1}, l/q)$ erhält man zwar eine ähnliche Formel, aber die Ergebnisse, die man durch ihre Anwendung erhält sind schlechter, als diejenigen, die man mit Hilfe von (3.8) erhält.

Zuletzt werden noch die Exponentialfunktion und die Röntgentransformation invertiert.

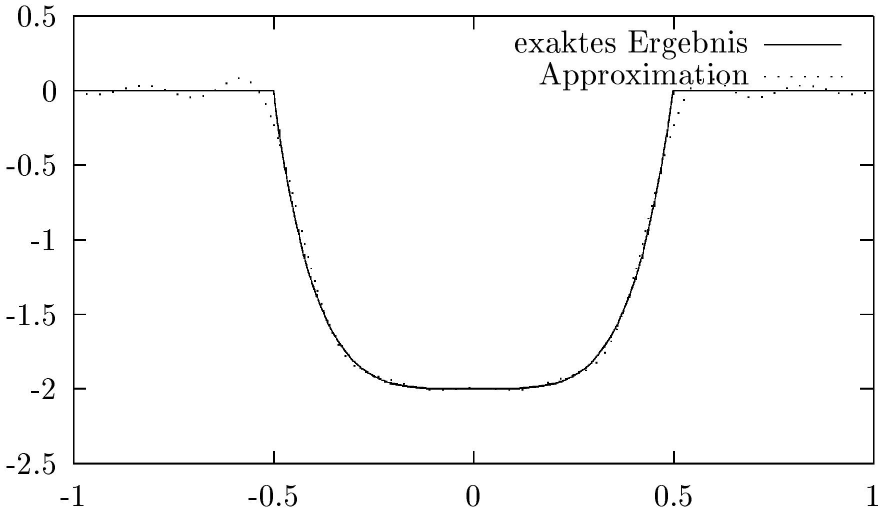
In den folgenden numerischen Beispielen wird $A_{k,2}V(\theta_{m_1}, \theta'_{m_2})$ mit Hilfe einer diskreten Fouriertransformation berechnet und danach die oben beschriebene Methode zur Inversion der Eikonalapproximation angewendet. Das Objekt ist ein Kreis mit Radius $\delta = 0.5$ und Funktionswert im Innern des Kreises $V = 0.5 \cdot k^2$. Die Anzahl der einfallenden Wellen beträgt 80, d.h. es gilt $p = 20$. Um die Röntgentransformation durch eine gefilterte Rückprojektion invertieren zu können, wird (3.8) für jede Richtung ω an $2 \cdot 64 + 1$ äquidistant über $[-1, 1]$ verteilte Stellen l/q berechnet. Als Faltungsfilter e wird der Shepp-Logan Filter (vgl. [10], [11]) mit Regularisierungsparameter $\gamma = q\pi$ gewählt. Die Wellenzahl ist $k = \frac{2\pi}{0.5}$. Die Ergebnisse werden wegen der Radialsymmetrie des Objekts auf der x_1-Achse dargestellt.

Die erste Abbildung zeigt die Rekonstruktion des Objekts.



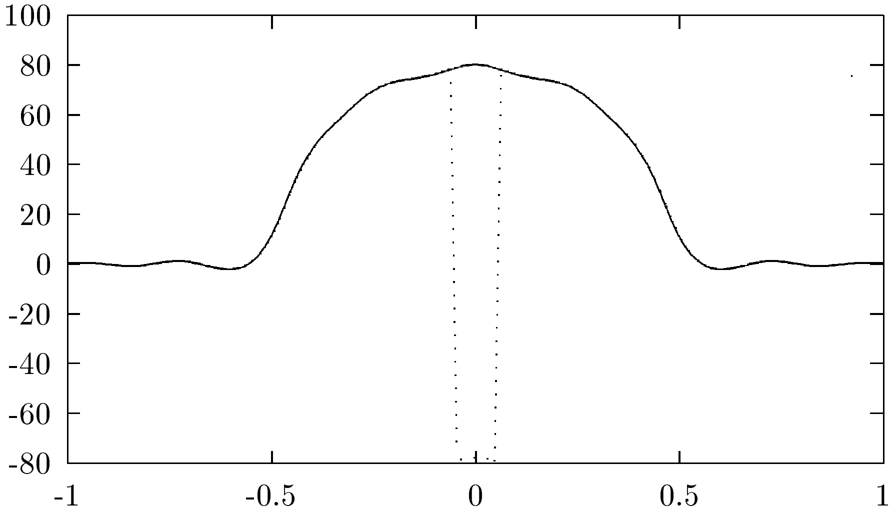
$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.5$, $\lambda = 0.5$, $p = 20$, $q = 64$.

Die nächste Abbildung zeigt, dass das Zwischenergebnis, das man nach der inversen Fouriertransformation erhält, nur gering von dem exakten Ergebnis abweicht.



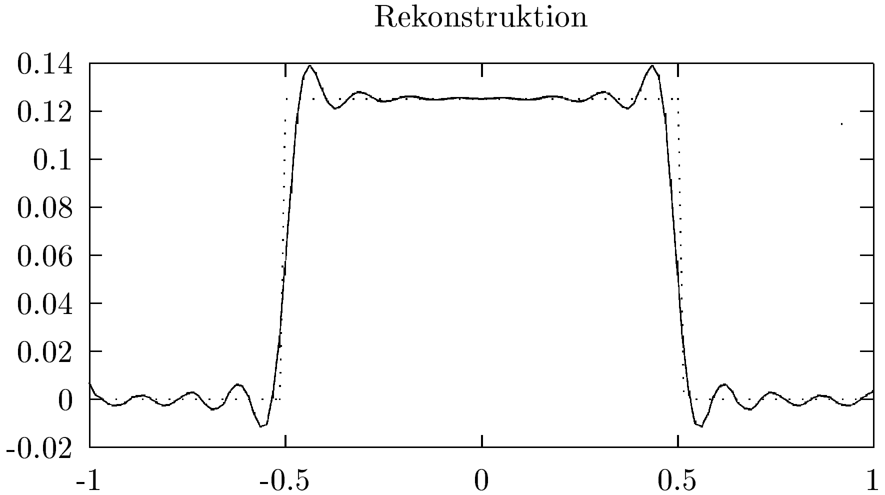
$\delta = 0.5$, $V = k^2 \cdot 0.5$, $\lambda = 0.5$, $p = 20$, $q = 64$.

Das nächste Beispiel zeigt, dass in unserem Beispiel das zunächst unstetige Zwischenergebnis, das man nach der Anwendung des Logarithmus erhält, sich durch Addition eines geeigneten Vielfachen von $4k\pi$ in eine stetige Kurve umwandeln lässt.



$\delta = 0.5,\ V = k^2 \cdot 0.5,\ \lambda = 0.5,\ p = 20,\ q = 64.$

Die letzte Abbildung in diesem Abschnitt zeigt, dass wenn man $k = \frac{2\pi}{0.25}$ und $V = k^2 \cdot 0.125$ wählt, die berechnete Rekonstruktion ziemlich genau mit der exakten Lösung übereinstimmt.



$\delta = 0.5,\ V = k^2 \cdot 0.125,\ \lambda = 0.25,\ p = 20,\ q = 64.$

Wählt man dagegen beim gleichen Objekt λ kleiner als 0.25 (z.B. $\lambda = 0.125$), so verschlechtern sich die Rekonstruktionen. Das Gleiche gilt, wenn man den von k unabhängigen Anteil V_A von $V = k^2 \cdot V_A$ zu groß wählt.

3.2 Rekonstruktion des Objekts aus analytisch exakten Daten

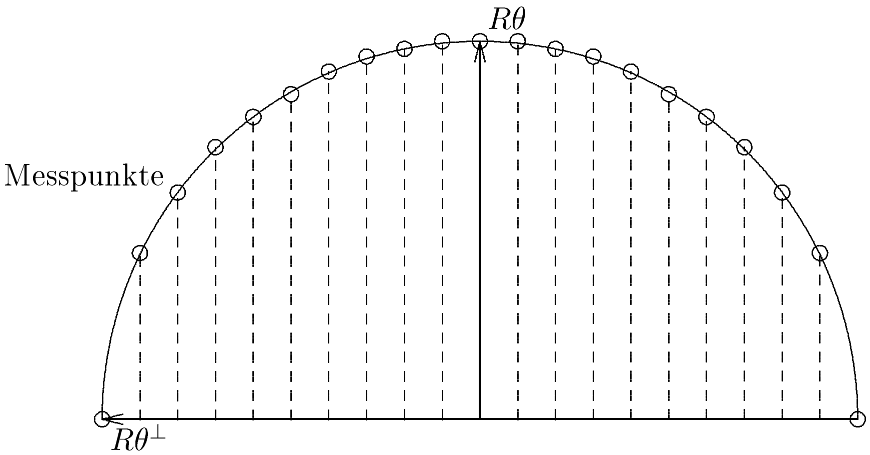
In Abschnitt 2.1.1 wurde die Formel (2.7) hergeleitet, die eine Beziehung zwischen dem Nahfeld u_θ und der Röntgentransformation $\mathcal{P}V$ von V herstellt,

$$u_\theta(b+\rho\omega) \approx u_{\theta,\theta'}(b+\rho\omega) = e^{ik<b+\rho\omega,\theta>} \cdot e^{-\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{\rho} V(b+r\omega)\,dr}, \;\; b \in \omega^\perp.$$

In Abschnitt 2.4 wurde vermutet, dass die Differenz zwischen exaktem Nahfeld u_θ und der Approximation $u_{\theta,\theta'}$ für $\theta' = \theta$, d.h. für $\omega = \theta$ minimal wird. Deshalb werden wir in diesem Abschnitt $\theta' = \theta$ wählen. Wählt man ρ so, dass $b + \rho\theta$ außerhalb des Trägers von V liegt, so erhält man eine Beziehung zwischen Nahfeld u_θ und Röntgentransformation $\mathcal{P}V$ von V, die man zur Berechnung von V aus den Nahfelddaten u_θ benutzen kann (vgl. Abschnitt 2.1.1),

$$u_\theta(b+\rho\theta) \approx u_{\theta,\theta}(b+\rho\theta) = e^{ik\rho} \cdot e^{-\frac{i}{2k}\mathcal{P}V(\theta,b)}, \;\; b \in \theta^\perp. \tag{3.9}$$

In diesem Abschnitt wird der zweidimensionale Fall betrachtet werden. Zuerst berechnen wir das Nahfeld u_θ auf einem Halbkreis mit Radius R, der außerhalb des Objekts liegt, mit Hilfe der Formel (1.22). Die einzelnen Messpunkte sind dabei so über den Halbkreis verteilt, dass die $\theta^\perp$-Koordinaten der Messpunkte gerade äquidistant über das Intervall $[-R, R]$ verteilt sind.



Die Richtungen θ der einfallenden ebenen Wellen seien äquidistant über den Einheitskreis S^1 verteilt. Nach einer punktweisen Multiplikation und der Anwendung eines Logarithmus hat man dann Approximationen an die Daten $\mathcal{P}V(\theta, b)$ in der parallelen Geometrie gegeben. Setzt man u_θ in (3.9) ein, so erhält man

$$\mathcal{P}V(\theta, b) \approx 2ki \log(e^{-ik\rho} u_\theta(b+\rho\theta)). \tag{3.10}$$

Durch Anwendung einer gefilterten Rückprojektion kann man dann das Objekt V in der zweidimensionalen "Schicht" bestimmen, in der der Messkreis gelegen hat.

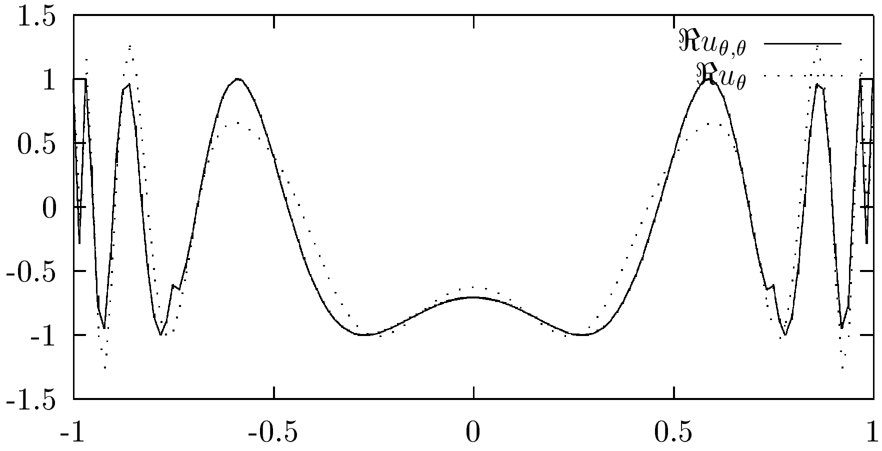
Für jedes Testobjekt und jede verwendete Wellenlänge werden nun zuerst die Approximation $u_{\theta,\theta}$ mit dem analytisch exakten Nahfeld u_θ verglichen. Danach werden die Rekonstruktionen miteinander verglichen, die man erhält, wenn man jeweils $u_{\theta,\theta}$ bzw. u_θ in (3.10) einsetzt. Die Nahfelddaten u_θ wurden mit Matlab berechnet. Alle übrigen Berechnungen in diesem Abschnitt wurden mit C/C++ durchgeführt.

Da für eine kreisförmige Messanordnung das Ergebnis, das man erhält, wenn man $u_{\theta,\theta}$ in (3.10) einsetzt, ziemlich genau mit dem exakten V übereinstimmt, werden wir es mit $\tilde{V}_{exakt}$ bezeichnen. Das Ergebnis, das man erhält, wenn man u_θ in (3.10) einsetzt, bezeichnen wir mit $\tilde{V}_{approx}$. In den hier vorgestellten Beispielen ist das untersuchte Objekt ein Kreis mit Radius δ. Der Funktionswert im Innern des Objekts sei $V = 0.125 \cdot k^2$. Die Wellenzahl ist $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Die Daten u_θ und $u_{\theta,\theta}$ werden an $2q+1$ äquidistant über einen Halbkreis mit Radius R verteilten Stellen berechnet. Als Radius R des Messkreises wurde $R = 1$ gewählt. Die Anzahl der einfallenden Felder sei $p = 100$. Da das Objekt radialsymmetrisch ist, genügt es wieder, die Rekonstruktionen auf einer Geraden darzustellen. In den Abbildungen, in denen u_θ mit $u_{\theta,\theta'}$ verglichen wird, seien auf der x-Achse die $\theta^\perp$-Koordinaten der Messpunkte aufgetragen, und auf der y-Achse jeweils die berechneten Funktionswerte.

Aus Gründen der graphischen Darstellung und der besseren Vergleichbarkeit, werden die Funktionswerte von $\tilde{V}_{exakt}$ und $\tilde{V}_{approx}$ jeweils durch das Quadrat der Wellenzahl k normiert. Das gleiche gilt auch für die Zwischenergebnisse $\mathcal{P}V$ und $\mathcal{P}V_{approx}$, die man vor Anwendung der gefilterten Rückprojektion erhält. In den Abbildungen sei mit $\Re$ jeweils der Realteil und mit $\Im$ jeweils der Imaginärteil bezeichnet.

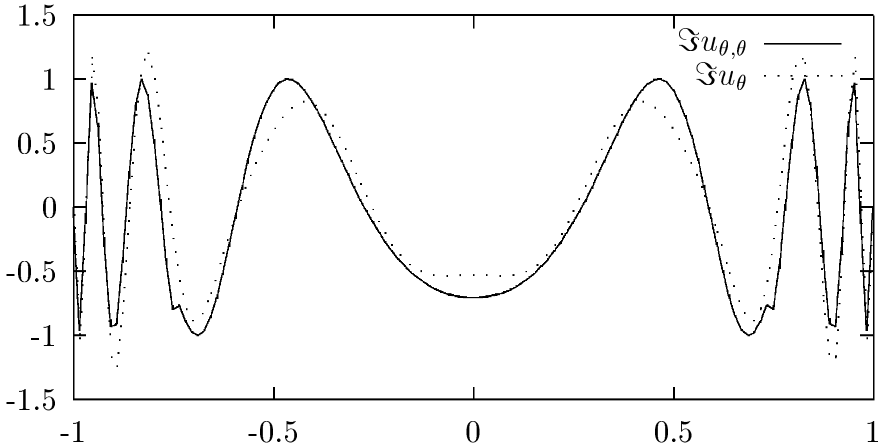
In den ersten Beispielen wird die Wellenlänge $\lambda = 0.25$ gewählt. In den nächsten vier Abbildungen werden jeweils die Messdaten und die Rekonstruktionen miteinander verglichen, wobei das Objekt ein Kreis mit Radius $\delta = 0.75$ ist.

Vergleich zwischen u_θ und $u_{\theta,\theta}$



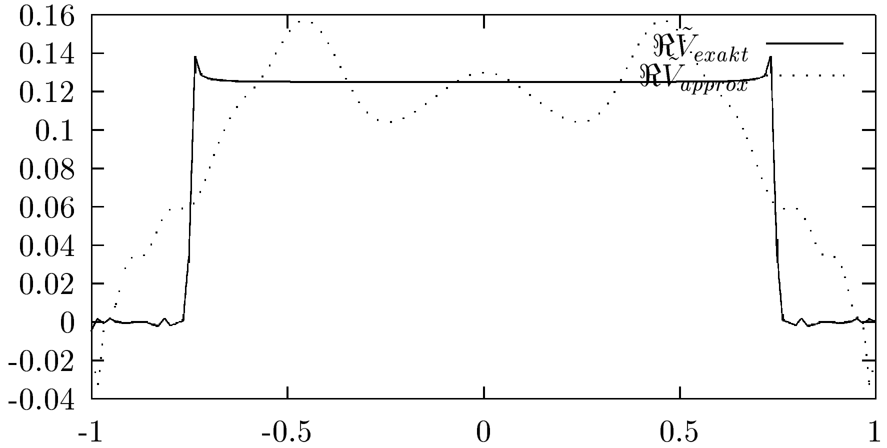
$\delta = 0.75,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.25,\ q = 64,\ R = 1.0.$

Vergleich zwischen u_θ und $u_{\theta,\theta}$



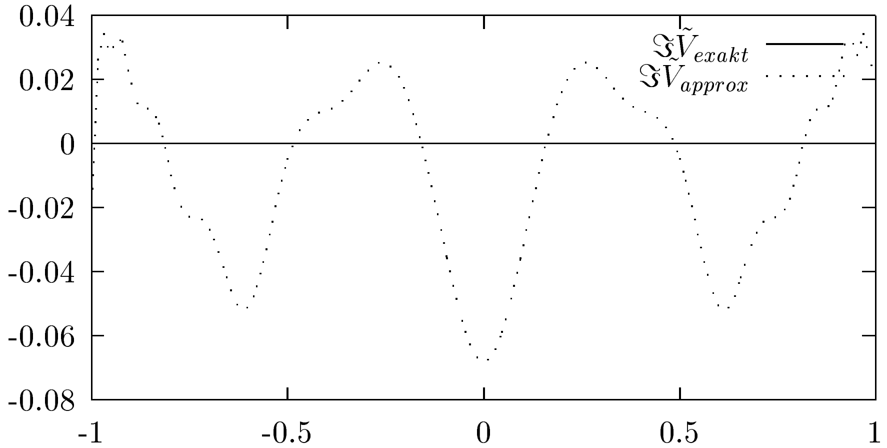
$\delta = 0.75,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.25,\ q = 64,\ R = 1.0.$

Vergleich zwischen $\tilde{V}_{exakt}$ und $\tilde{V}_{approx}$



$\delta = 0.75,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.25,\ q = 64,\ R = 1.0.$

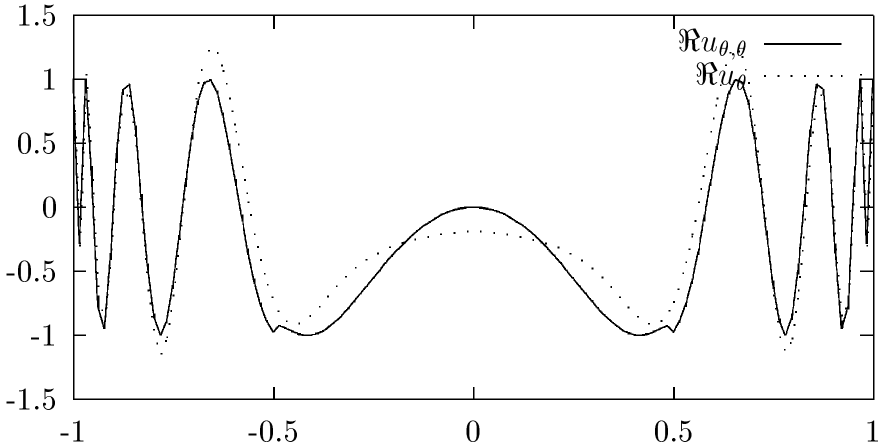
Vergleich zwischen $\tilde{V}_{exakt}$ und $\tilde{V}_{approx}$



$\delta = 0.75,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.25,\ q = 64,\ R = 1.0.$

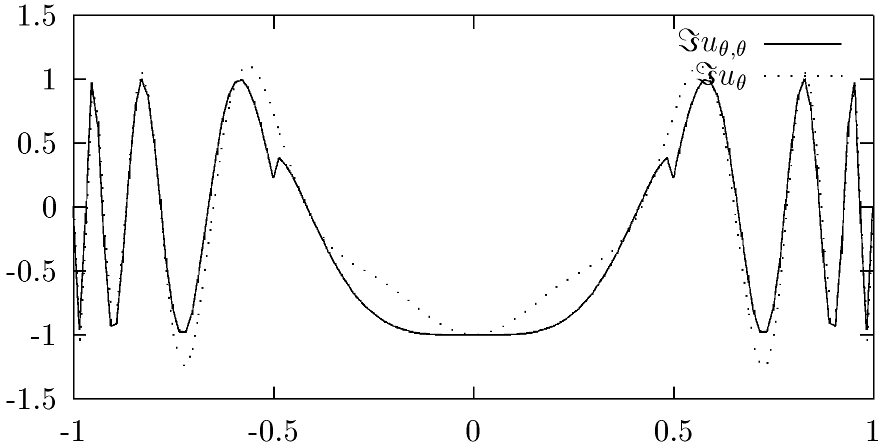
In den nächsten vier Abbildungen wird als Radius $\delta = 0.5$ gewählt.

Vergleich zwischen u_θ und $u_{\theta,\theta}$



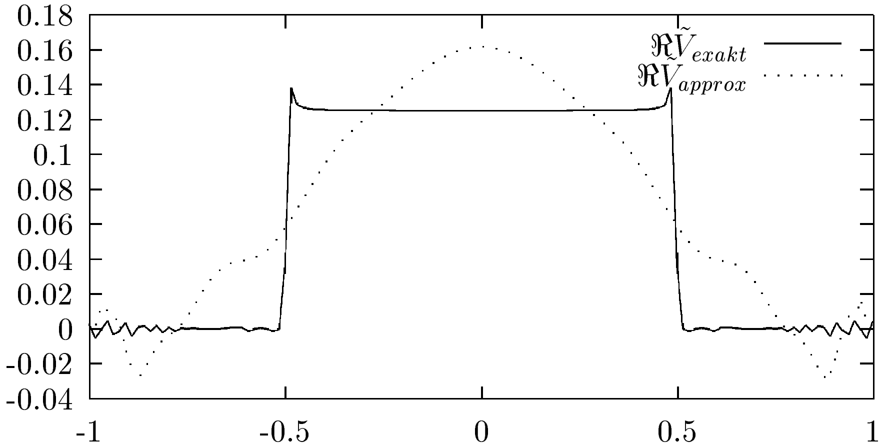
$\delta = 0.5,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.25,\ q = 64,\ R = 1.0.$

Vergleich zwischen u_θ und $u_{\theta,\theta}$



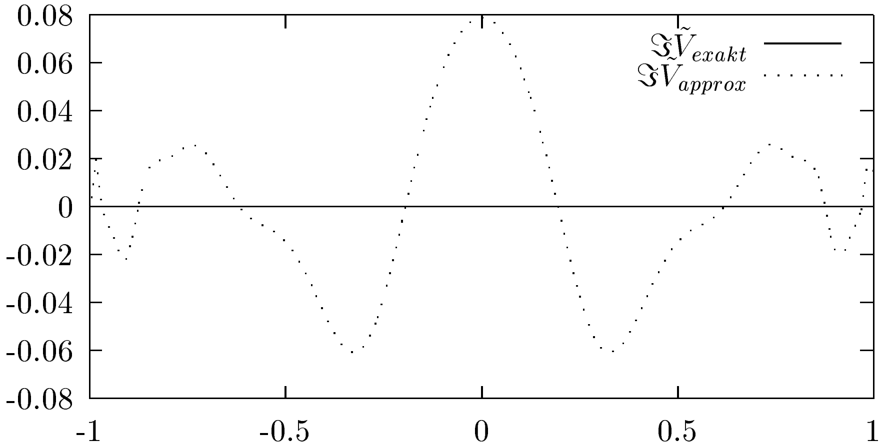
$\delta = 0.5,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.25,\ q = 64,\ R = 1.0.$

Vergleich zwischen $\tilde{V}_{exakt}$ und $\tilde{V}_{approx}$



$\delta = 0.5,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.25,\ q = 64,\ R = 1.0.$

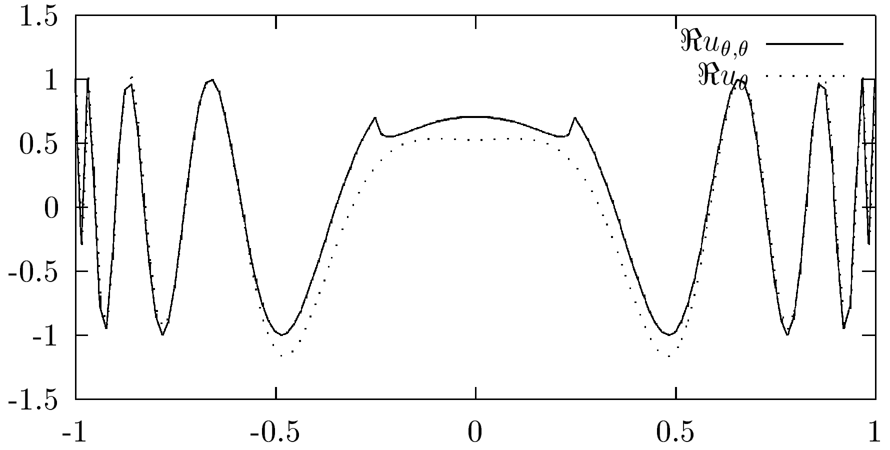
Vergleich zwischen $\tilde{V}_{exakt}$ und $\tilde{V}_{approx}$



$\delta = 0.5,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.25,\ q = 64,\ R = 1.0.$

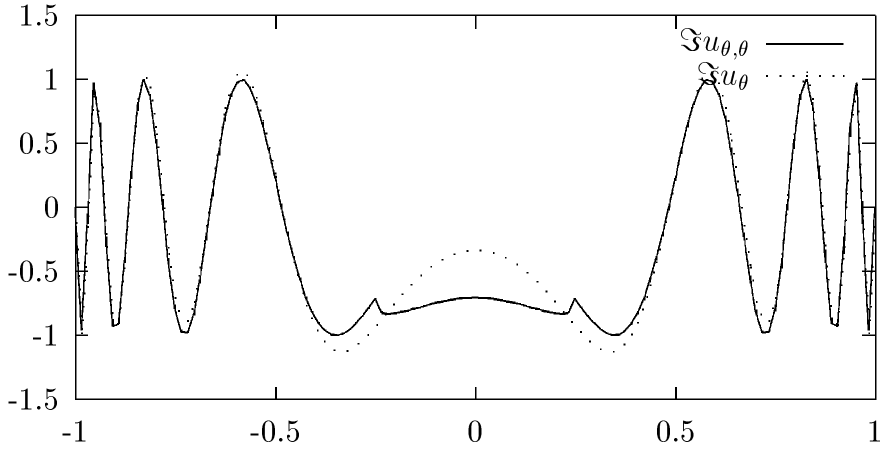
In den nächsten vier Abbildungen wird als Objekt ein Kreis mit Radius $\delta = 0.25$ gewählt.

Vergleich zwischen u_θ und $u_{\theta,\theta}$



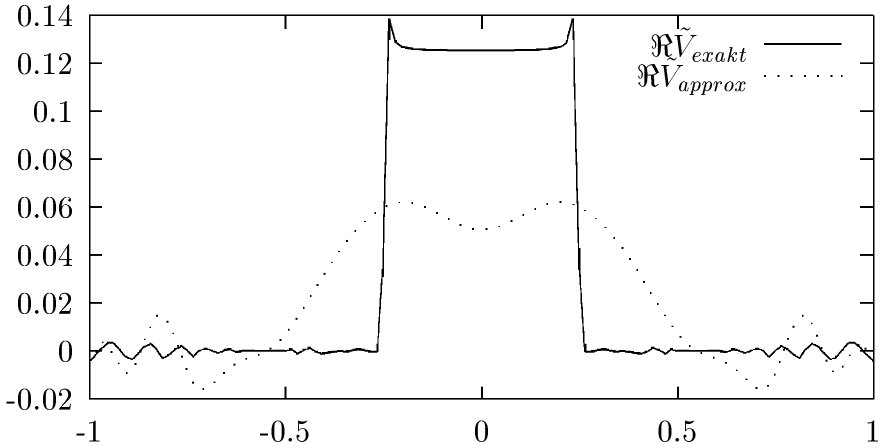
$\delta = 0.25,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.25,\ q = 64,\ R = 1.0.$

Vergleich zwischen u_θ und $u_{\theta,\theta}$



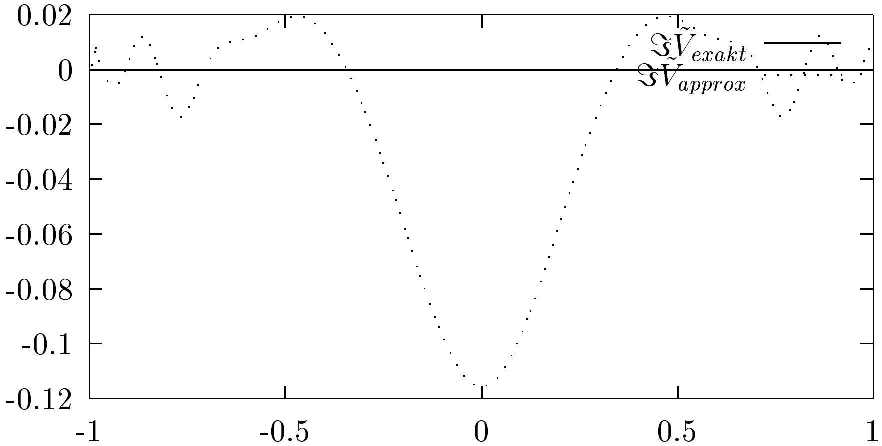
$\delta = 0.25,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.25,\ q = 64,\ R = 1.0.$

Vergleich zwischen $\tilde{V}_{exakt}$ und $\tilde{V}_{approx}$



$\delta = 0.25,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.25,\ q = 64,\ R = 1.0.$

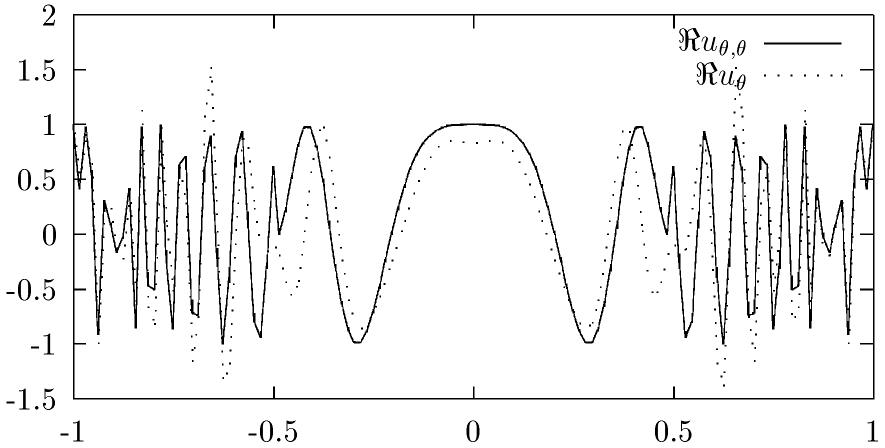
Vergleich zwischen $\tilde{V}_{exakt}$ und $\tilde{V}_{approx}$



$\delta = 0.25,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.25,\ q = 64,\ R = 1.0.$

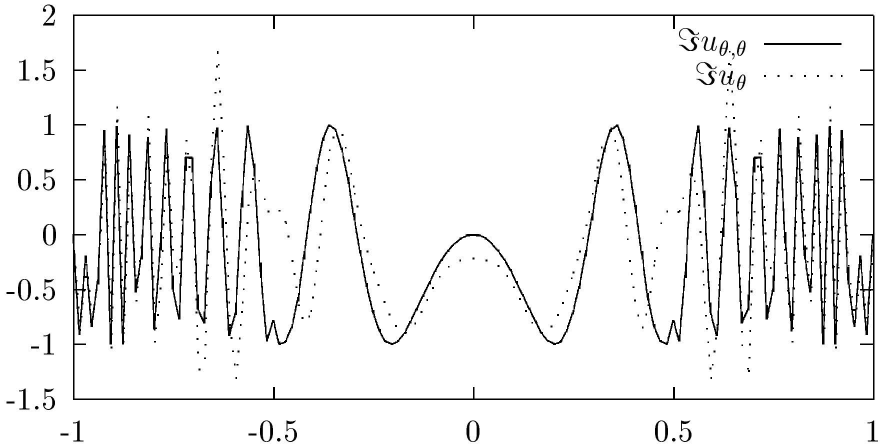
Wie man an den Rekonstruktionen des Realteils der Objekte sieht, “verschwimmen” die Rekonstruktion $\Re\tilde{V}_{approx}$ im Gegensatz zu $\Re\tilde{V}_{exakt}$, d.h. die Sprungstellen sind in den Rekonstruktionen $\Re\tilde{V}_{approx}$ nicht mehr gut zu erkennen. Dies soll am nächsten Beispiel genauer untersucht werden. Als Wellenlänge wird diesmal $\lambda = 0.0625$ gewählt und das Objekt ist ein Kreis mit Radius $\delta = 0.5$. Zunächst werden wie zuvor die auf dem Messkreis simulierten Daten miteinander verglichen.

Vergleich zwischen u_θ und $u_{\theta,\theta}$



$\delta = 0.5,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.0625,\ q = 64,\ R = 1.0.$

Vergleich zwischen u_θ und $u_{\theta,\theta}$



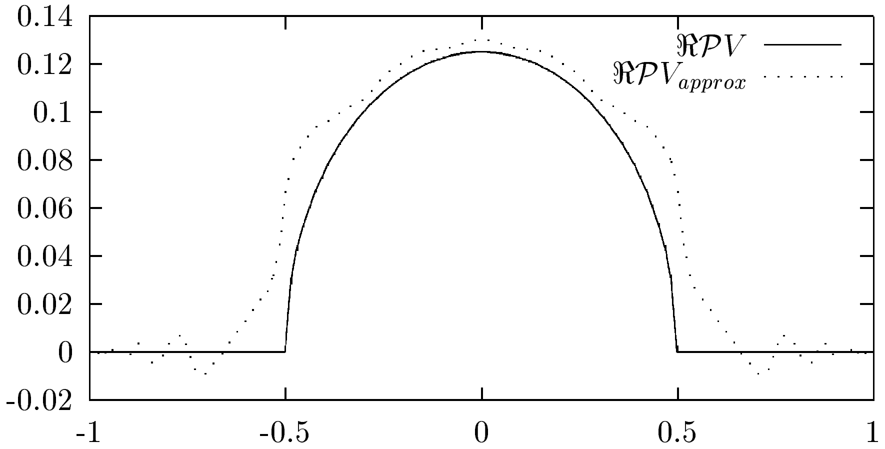
$\delta = 0.5,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.0625,\ q = 64,\ R = 1.0.$

Die nächste Abbildung zeigt den Vergleich zwischen der exakten Röntgentransformation $\mathcal{P}V$ und der Approximation $\mathcal{P}V_{approx}$,

$$\mathcal{P}V_{approx}(\theta, b) := 2ki \log(e^{-ik\rho} u_\theta(b + \rho\theta)),$$

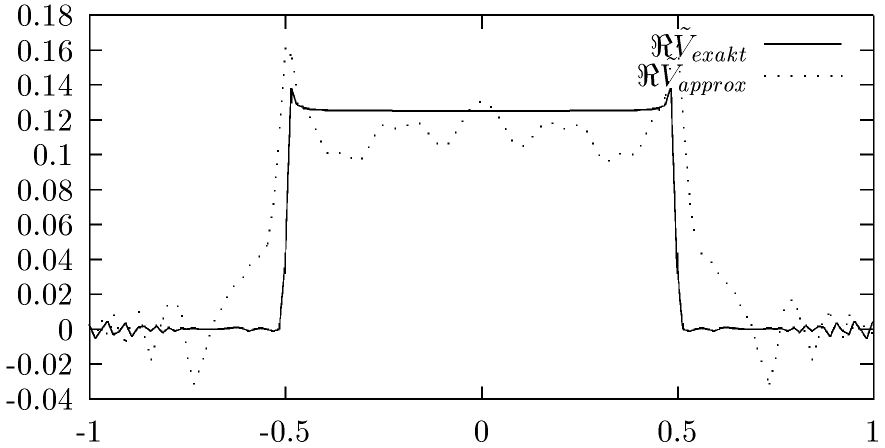
wobei $b + \rho\theta$ jeweils den Punkt auf dem Messkreis bezeichnet, dessen $\theta^\perp$ Koordinaten mit denen von b übereinstimmen. Wie man sieht, ist der Träger von $\mathcal{P}V(\theta, \cdot)$ kompakt, da der Träger von V kompakt ist. Im Gegensatz dazu besitzt $\mathcal{P}V_{approx}(\theta, \cdot)$ keinen kompakten Träger. Dies lässt sich dadurch erklären, dass wenn man θ und $b \in \theta^\perp$ als feste Parameter ansieht, bei der Herleitung der Approximation $u_{\theta,\theta}$ jeweils nur Beziehungen zwischen $u_{\theta,\theta}$ und V auf der Linie $L_{\theta,b} := \{b + \rho\theta \in \mathbb{R}^3 :\ \rho \in \mathbb{R}\}$ berücksichtigt wurden. Wechselwirkungen zwischen dem Streufeld u^s_θ und dem Potential V außerhalb der Linie $L_{\theta,b}$ wurden nicht berücksichtigt. Gerade bei kleiner Wellenzahl k bewegt sich die Welle nicht geradlinig fort, und es kommt zu Streueffekten. Dass der Träger von $\mathcal{P}V_{approx}$ nicht kompakt ist, führt dazu, dass auch außerhalb des Trägers von V die berechneten Werte $\tilde{V}_{approx}$ ungleich Null, also fehlerhaft sind. Außerdem werden die dadurch entstandenen Fehler sich auch im Innern des Trägers von V bemerkbar machen, da die Berechnung von V in einem Punkt x aus $\mathcal{P}V$ nicht lokal nur von den Linienintegralen abhängt, die eine Umgebung von x treffen. Man könnte vielleicht versuchen, dies durch die Wahl einer geeigneten Messgeometrie oder durch die Erhöhung der Wellenzahl k zu kompensieren. Ist dies nicht möglich, so wird sich der dadurch entstandene "Approximationsfehler" nicht so ohne weiteres vermeiden lassen. Diese Beobachtungen werden z.B. durch folgendes Beispiel bestätigt.

Vergleich zwischen $\mathcal{P}V$ und $\Re\mathcal{P}V_{approx}$



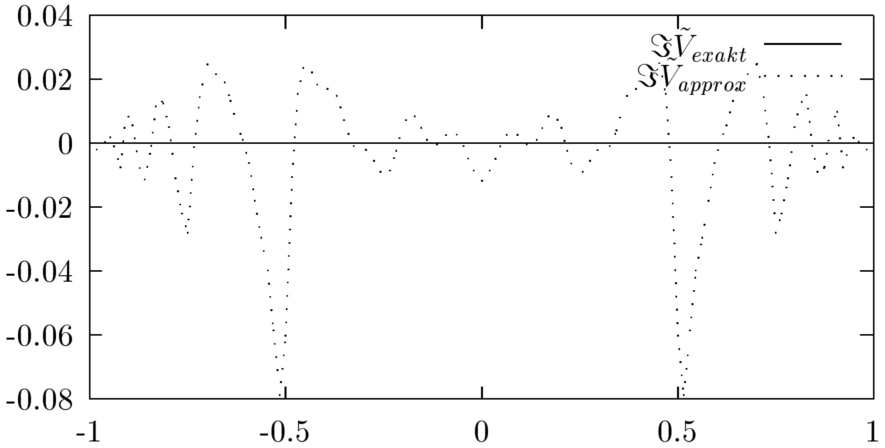
$\delta = 0.5,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.0625,\ q = 64,\ R = 1.0.$

Vergleich zwischen $\tilde{V}_{exakt}$ und $\tilde{V}_{approx}$



$\delta = 0.5,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.0625,\ q = 64,\ R = 1.0.$

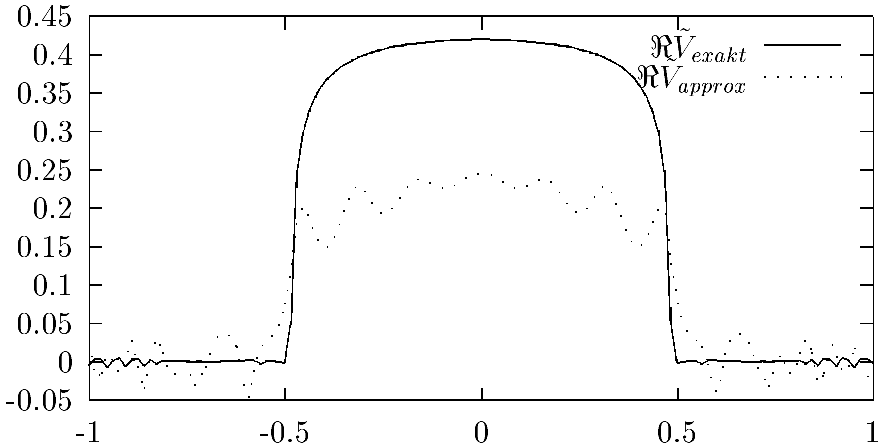
Vergleich zwischen $\tilde{V}_{exakt}$ und $\tilde{V}_{approx}$



$\delta = 0.5,\ V = 0.125 \cdot k^2,\ \lambda = 0.0625,\ q = 64,\ R = 1.0.$

Man erkennt, dass die Rekonstruktionen besser werden, wenn die verwendete Wellenlänge kleiner wird. In der letzten Abbildung wird wieder $\lambda = 0.0625$ gewählt. Das Objekt ist auch wieder ein Kreis mit Radius $\delta = 0.5$. Allerdings ist der Funktionswert im Innern des Objekts mit $V = k^2 \cdot 0.5$ jetzt größer als vorher. Man sieht, dass die Rekonstruktionen schlechter werden, wenn V größer wird.

Vergleich zwischen $\tilde{V}_{exakt}$ und $\tilde{V}_{approx}$

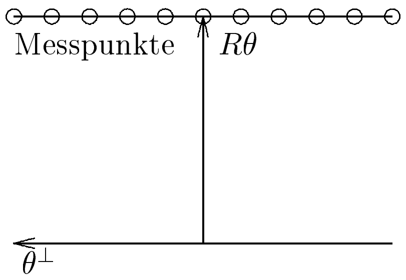


$\delta = 0.5,\ V = 0.5 \cdot k^2,\ \lambda = 0.0625,\ q = 64,\ R = 1.0.$

Weiterhin ist es auch möglich, das Nahfeld durch 3D-Daten mit Hilfe von Gleichung (1.16) zu modellieren, indem man annimmt, dass V eine Kugel ist. Man berechnet dann die 3D-Daten mit Hilfe von Gleichung (1.16) nur in der x_1-x_2-Ebene und wendet dann (3.10) zur Berechnung von V an. Allerdings weicht das nach Gleichung (1.16) berechnete Nahfeld mehr von der Approximation $u_{\theta,\theta}$ ab, als die bisher verwendeten 2D-Daten.

Die Abbildungen in diesem Abschnitt zeigen, dass es prinzipiell möglich ist, Objekte aus Nahfelddaten zu rekonstruieren, wenn man das inverse Streuproblem durch Gleichung (3.10) modelliert. Vor allem, wenn die Wellenzahl größer wird, erhält man "recht" gute Rekonstruktionen. Ist die Wellenzahl klein, so sieht man, dass die berechneten Rekonstruktionen schlechter werden. Speziell wird dann auch die inverse Eikonalapproximation keine guten Rekonstruktionen aus Fernfelddaten liefern, da man die Eikonalapproximation durch eine Fouriertransformation aus der Approximation an das Nahfeld erhalten hat. Schließlich wurde noch numerisch untersucht, ob man die Eikonalapproximation zur Rekonstruktion von V aus Fernfelddaten verwenden kann. Auch für größere Wellenzahlen (z.B. $k = 32\pi$) hatten die dabei berechneten Rekonstruktionen keine Ähnlichkeit mit dem exakten Objekt V.

Die in dieser Arbeit verwendeten Objekte waren alle radialsymmetrisch. Sowohl das direkte Streuproblem, als auch die zur Inversion verwendeten Operatoren sind nichtlinear. Deshalb ist es nicht klar, ob die Ergebnisse, die in dieser Arbeit gewonnen wurden, auch für Objekte gültig sind, die man als Kombination von radialsymmetrischen Objekten erhält. Wegen der Nichtlinearität des direkten Streuproblems ist es leider nicht möglich, das Nahfeld für mehrere Objekte einzeln zu berechnen, und dann die einzelnen Nahfelder zu addieren. Will man also feststellen, ob die oben beschriebene Methode zur Modellierung des inversen Streuproblems geeignet ist, so sind weitergehende Untersuchungen notwendig, die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden. Gleichung (3.10) wurde auch auf Daten angewandt, die eine Messung auf einer Messlinie simulieren.



Die dadurch erhaltenen Rekonstruktionen waren schlechter, als diejenigen, die man erhalten hat, wenn man das Nahfeld auf einem Messkreis simuliert. Dies liegt daran, dass man selbst dann, wenn man die Approximation $u_{\theta,\theta}$ in (3.10) einsetzt, nicht mehr das exakte Potential V erhält. Die Frage, wie die Qualität der Rekonstruktion von der Messgeometrie abhängt, wird also auch nicht in dieser Arbeit geklärt. Die numerischen Beispiele belegen aber, dass es prinzipiell möglich sein könnte, das inverse Streuproblem mit der in dieser Arbeit untersuchten Methode zu invertieren.

Literaturverzeichnis

[1] Abramowitz M. - Stegun I.A., Pocketbook of Mathematical Functions, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/Main, 1984.

[2] Abdullah H., Anwendung der Approximativen Inversen zur Herleitung einer Rekonstruktionsformel für ein zweidimensionales inverses Streuproblem, Dissertation, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 1998.

[3] Colton D.L. - Kress R., Integral equation methods in scattering theory, Wiley, New York, 1983.

[4] Colton D.L. - Kress R., Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, Springer, Berlin, 1992.

[5] Dietz R.L., Analyse von Rekonstruktionsverfahren bei der 3D-Röntgen-Computer-Tomographie, Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 1994.

[6] Deuflhardt P. - Hohmann A., Numerische Mathematik I, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1991.

[7] Kak A.C. - Slaney M., Principles of Computerized Tomographic Imaging, IEEE Press, New York, 1988.

[8] Kress R., Linear Integral Equations, Second Edition, Springer, 1998.

[9] Louis A.K., The eikonal approximation in ultrasound computer tomography, in Friedman A. et al(eds). Proceedings of the IMA Conference on Signal Processing, Springer, Berlin, 1989.

[10] Louis A.K., Inverse und schlecht gestellte Probleme, Teubner, Stuttgart, 1989.

[11] Natterer F., The Mathematics of Computerized Tomography, Wiley and Teubner, Stuttgart, 1986.

[12] Natterer F., Numerical Methods in Tomography, Paper, Münster, 1999.

[13] Natterer F., Algorithms in Tomography, Paper, Münster, 1998.

[14] Natterer F., Skript, Partielle Differentialgleichungen, WS 1996/97.

[15] Newton R.G., Scattering Theory of Waves and Particles, 2nd ed, Springer, Berlin, 1986.

[16] Remmert R., Funktionentheorie 1, 4.Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, 1995.

[17] Solmon D.C., The X-Ray transform, Journ. Math. Anal. Appl., 56 (1976), S.61-83.

[18] Werner D., Funktionalanalysis, Springer, Berlin, Heidelberg, 1995.