

# Iterationsverfahren zur Lösung inverser Probleme unter Berücksichtigung von Zusatzinformationen

Wissenschaftliche Arbeit im Fach Mathematik

Christian Hissler

Prüfer: Prof. Dr. A. K. Louis

Universität des Saarlandes

Mai 1997

# Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	V
Einleitung	1
<b>1 Grundlagen</b>	<b>3</b>
<b>2 Konvexe Restriktionen</b>	<b>8</b>
2.1 Einige Eigenschaften von $A_C^\dagger$ . . . . .	8
2.2 Das Bild von $A_C^\dagger$ . . . . .	11
2.3 Tikhonov-Regularisierung restringierter Probleme . . . . .	13
2.4 Die Landweber-Iteration . . . . .	15
<b>3 Iterationsverfahren</b>	<b>16</b>
3.1 Die projizierte Landweber-Iteration . . . . .	16
3.2 Ein Verfahren für “glatte” Lösungen . . . . .	23
3.3 Die gedämpfte Landweber-Iteration . . . . .	27
<b>4 Numerische Realisierung der Verfahren</b>	<b>33</b>
4.1 Einführende Beispiele . . . . .	33
4.1.1 Fredholmsche Integralgleichung . . . . .	33
4.1.2 Abelsche Integralgleichung . . . . .	35
4.2 Numerische Lösungen . . . . .	36

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	II
4.2.1 Lösung einer Fredholmschen Integralgleichung . . . . .	37
4.2.2 Lösung einer Abelschen Integralgleichung . . . . .	41
4.3 Ausblick auf nichtlineare Probleme und Literatur . . . . .	44
4.3.1 Das nichtlineare Landweber-Verfahren . . . . .	44
4.3.2 Weiterführende Literatur . . . . .	45
<b>Anhang</b>	<b>45</b>
<b>A Projektoren</b>	<b>46</b>
<b>B Zur Norm des Abelschen Integraloperators</b>	<b>48</b>
B.1 Stetigkeit des Abelschen Integraloperators $J^\alpha$ in $L^p$ -Räumen . . . . .	48
<b>Literatur</b>	<b>50</b>

# Tabellenverzeichnis

4.1 Ergebnisse für Fredholmsche Integralgleichung bei $\beta = 90$ . . . . .	39
4.2 Ergebnisse für Fredholmsche Integralgleichung bei $\beta = 180$ . . . . .	40
4.3 Ergebnisse für Abelsche Integralgleichung bei $\beta = 1.6$ . . . . .	42
4.4 Ergebnisse für Abelsche Integralgleichung bei $\beta = 2.8$ . . . . .	43

# Abbildungsverzeichnis

4.1	Auslenkung des Seils . . . . .	34
4.2	Kräftegleichgewicht am Punkt $(s, g(s))$ . . . . .	34
4.3	Geometrische Beschreibung, $L = L_{\phi, s}$ , $sx = sx(\phi)$ . . . . .	36
4.4	(V1): Das Fehlerverhalten für $\beta = 90$ und $\beta = 180$ bei gestörten und exakten Daten . . . . .	40
4.5	(V3): Das Fehlerverhalten für $\beta = 90$ und $\beta = 180$ bei gestörten und exakten Daten . . . . .	41
4.6	(V1): Das Fehlerverhalten für $\beta = 1.6$ und $\beta = 2.8$ bei gestörten und exakten Daten . . . . .	43
4.7	(V3): Das Fehlerverhalten für $\beta = 1.6$ und $\beta = 2.8$ bei gestörten und exakten Daten . . . . .	44

# Symbolverzeichnis

$X$	der Hilbertraum $X$
$\dim(V)$	die Dimension des Unterraumes $V$
$\text{dist}(X, s)$	der Abstand des Punktes $s$ von der Menge $X$
$g^\epsilon$	gestörte Daten
$f_n^\epsilon$	die $n$ -te Iterierte bei gestörten Daten $g^\epsilon$
$U_\epsilon$	der Operator $U$ für gestörte Daten: $U_\epsilon f = (I - \beta A^* A)f - \beta A^* g^\epsilon$
$A^*$	der zum Operator $A$ adjungierte Operator
$P_C$	die metrische Projektion auf eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge $C$
$A^\dagger$	die verallgemeinerte Inverse zum Operator $A$
$A_C^\dagger$	die restringierte verallgemeinerte Inverse zum Operator $A$
$I$	die identische Abbildung
$\mathcal{R}(A)$	der Bildraum (Range) des Operators $A$
$\mathcal{D}(A)$	die Definitionsmenge des Operators $A$
$\mathcal{N}(A)$	der Nullraum des Operators $A$
$\text{Fix}(T)$	die Menge der Fixpunkte der Iteration $T$
$L_2[0, 1]$	der Raum der quadratintegriblen Funktionen auf $[0, 1]$
$H^2[0, 1]$	der Sobolevraum über $[0, 1]$
$\square$	das Ende eines Beweises

# Einleitung

Viele Probleme in der Medizin, der Geophysik oder beim Einsatz zerstörungsfreier Prüfverfahren lassen eine direkte Messung der Eigenschaften des zu untersuchenden Objekts nicht zu. In diesem Fall behilft man sich, indem man aus indirekten Beobachtungen auf diese Eigenschaften schließt. Man spricht dann im Gegensatz zu *direkten* von *inversen Problemen*. Sie treten zum Beispiel in der Geophysik auf, wo an seismischen Wellen Laufzeitmessungen durchgeführt werden, um Gesteinsformationen im Inneren der Erde erkennen zu können. Auf ähnliche Weise nutzt man in der Medizin bei der nicht-invasiven Untersuchung von Patienten die Intensitätsminderung von Röntgenstrahlen, die den Körper durchlaufen, um so ohne chirurgischen Eingriff ein Bild vom Inneren zu erhalten. Ferner treten inverse Probleme in Systemen auf, für die aus vorliegenden Daten ein abstraktes, mathematisches Modell gefunden werden soll. Louis bietet in [12] einen allgemeinen Überblick über die Behandlung inverser Probleme.

Die vorliegende Arbeit stützt sich auf eine Veröffentlichung von Bertolt Eicke:

**“ Iteration methods for convexly constrained ill-posed problems in Hilbert-space” [4].**

Das Ziel der Arbeit besteht darin, den Inhalt aufzuarbeiten und die vorgestellten Iterationsverfahren auf zwei typische Aufgabenstellungen aus dem Gebiet inverser Probleme anzuwenden.

Das erste Kapitel geht auf mathematische Grundlagen ein, die beim Verständnis der anschließend vorgestellten Verfahren behilflich sind. Es wird die verallgemeinerte Inverse als Lösung eines schlecht gestellten, inversen Problems eingeführt.

Im zweiten Kapitel werden Eigenschaften der verallgemeinerten Inversen für den Fall, daß nur bestimmte, in der vorliegenden Arbeit positive Lösungen zugelassen werden, aufgeführt.

Das dritte Kapitel liefert Verfahren, die dazu eingesetzt werden, eine solche Lösung zu finden.

Der letzte Abschnitt zeigt die Ergebnisse der praktischen Umsetzung der Methoden. Es wird eine Fredholmsche und Abelsche Integralgleichung unter obigem Aspekt gelöst. Schließlich wird noch ein kurzer Ausblick auf nichtlineare Probleme und Literatur zu diesem Themenbereich geboten.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. A. K. Louis für die Bereitstellung des Themas und die stete Hilfsbereitschaft danken. Weiterhin möchte ich allen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.



# Kapitel 1

## GRUNDLAGEN

Dieses Kapitel soll einen Einblick in die Behandlung inverser Probleme bieten. Allgemeine Begriffe und die notwendigen mathematischen Grundlagen werden angegeben.

Inverse Probleme lassen sich wie folgt genauer beschreiben:

Als mathematisches Modell für ein Experiment dient eine Abbildung  $A$  von der Menge  $X$  der *Parameter* in die Menge  $Y$  der *Resultate*

$$\begin{aligned} A : X &\longrightarrow Y \\ f &\longmapsto g. \end{aligned}$$

Ein *inverses Problem* liegt vor, wenn aus den Resultaten  $g \in Y$  das Urbild rekonstruiert werden soll.

Die Lösung dieses Problems ist einfach zu erhalten, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1.  $A$  ist Bijektion,
2.  $A^{-1}$  ist stetig bezüglich geeigneter Topologien in  $X$  und  $Y$ .

Die Bedingung der Bijektion garantiert die Eindeutigkeit der Lösung für alle  $g$  aus der Menge der Resultate. Die zweite Bedingung gewährleistet die Stabilität des Problems,

was bedeutet, daß auf kleine Änderungen in den Daten  $g$  kleine Änderungen im Ergebnis  $f$  folgen (was jedoch in der Praxis oft nicht erfüllt ist). Auf Hadamard (1932) geht dazu die folgende Definition zurück:

**Definition 1.0.1** Sei  $A : X \longrightarrow Y$  eine Abbildung mit topologischen Räumen  $X, Y$ . Das Problem  $(A, X, Y)$  heißt gut gestellt, wenn:

- a)  $Af = g$  für jedes  $g \in Y$  eine Lösung besitzt,
- b) diese Lösung eindeutig ist,
- c) die Lösung stetig von den Daten abhängt.

Sind nicht alle Bedingungen erfüllt, so heißt das Problem schlecht gestellt.

Nach dieser Definition zählen inverse Probleme in der Regel zu den schlecht gestellten. Louis gibt in [12] an, wie sie klassifiziert werden. Revalski liefert in [22] eine Übersicht über weitere Definitionen der Schlechtgestellttheit von Problemen, zum Beispiel in der Sprechweise von Tikhonov. Bei der Klassifizierung muß berücksichtigt werden, daß der Grad der Schlechtgestellttheit nicht nur vom Operator  $A$ , sondern auch von der Glätte der exakten Lösung  $f$  abhängt.

Es soll

$$\begin{array}{ccc} A : X & \longrightarrow & Y \\ f & \longmapsto & g \end{array}$$

gelöst werden, wobei  $X$  und  $Y$  Hilberträume über  $\mathbb{R}$  sind und  $g$  gegeben ist.

**Definition 1.0.2** [2]  $X$  und  $Y$  seien Hilberträume und  $U$  eine Teilmenge von  $X$ . Eine Funktion, die jedem  $f \in U$  eindeutig ein Element  $g = A(f) = Af \in Y$  zuordnet, nennt man Operator (auch Abbildung oder Transformation) von  $U$  nach  $Y$ .  $U$  heißt Definitionsbereich des Operators und wird mit  $\mathcal{D}(A)$  (domain of definition) bezeichnet. Die Menge  $\mathcal{R}(A) := \{g \in Y \mid \exists f \in \mathcal{D}(A) \text{ mit } Af = g\}$  heißt der Wertebereich (Range)

des Operators  $A$ . Dann ist  $A$  eine Abbildung von  $\mathcal{D}(A)$  nach  $\mathcal{R}(A)$ .

Die Menge  $\mathcal{N}(A) := \{f \in \mathcal{D}(A) \mid Af = 0\}$  wird als der Nullraum von  $A$  bezeichnet.

**Definition 1.0.3**  $A, X, Y$  wie oben.  $A$  heißt genau dann linear, wenn für beliebige  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ;  $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(A)$  gilt:

$$A(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 A f_1 + \alpha_2 A f_2.$$

$A$  heißt beschränkt, wenn es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  (Schranke von  $A$ ) gibt, so daß  $\|Af\| \leq c\|f\|$  für alle  $f \in \mathcal{D}(A)$  gilt.

**Definition 1.0.4**  $A$  sei linearer Operator von  $\mathcal{D}(A) \subseteq X$  nach  $X$  mit  $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$  ( $\mathcal{D}(A)$  liegt dicht in  $X$ ). Gibt es zu  $v \in X$  ein  $v^* \in X$  mit

$$(Aw, v) = (w, v^*) \text{ für alle } w \in \mathcal{D}(A),$$

dann ist die Zuordnung  $v \mapsto v^*$  eindeutig und linear.

Der Operator  $A^* : X \supseteq \mathcal{D}(A^*) \rightarrow X$ ;  $v \mapsto v^*$  heißt der zu  $A$  adjungierte Operator. Ein Element  $v^*$  ist genau dann ein Element von  $\mathcal{D}(A^*)$ , wenn es ein  $v \in X$  gibt, so daß  $(Aw, v) = (w, v^*)$  gilt.

$A$  sei im folgenden linear. Die Aufgabe lautet,  $Af = g$  zu lösen. Da nicht für jedes  $g \in Y$  eine Lösung  $f$  existiert, führt man den Begriff der *verallgemeinerten Lösung* und *verallgemeinerten Inversen* ein, um den Lösungsbegriff für eine größere Menge von Elementen aus  $Y$  definieren zu können. Dies geschieht, indem man statt der Gleichung  $Af = g$  das Problem betrachtet, den Abstand  $J(f) = \|Af - g\|_Y$  zu minimieren. Liegt  $g$  in  $\mathcal{R}(A)$ , so erhält man als minimalen Abstand Null. Liegt  $g$  in  $\mathcal{R}(A)^\perp$  (Orthogonalraum zu  $\mathcal{R}(A)$ ), so ist ebenfalls eine Minimierung möglich, jedoch existieren für nichtinjektives  $A$  unendlich viele Lösungen. Um Eindeutigkeit der Lösung in diesem Falle zu erhalten, wählt man das Element kleinster Norm. Diese Betrachtung führt zu folgender Definition:

**Definition 1.0.5** *A sei linearer, beschränkter Operator von  $X$  nach  $Y$  und  $g \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp =: \mathcal{D}(A^\dagger)$ . Als Moore-Penrose Lösung oder verallgemeinerte Lösung des Problems  $Af = g$  bezeichnet man  $f^\dagger \in X$  mit:*

- a)  $f^\dagger$  minimiert den Defekt  $J(u) := \|Au - g\|_Y$ ,
- b) für alle  $f \in X$  mit  $J(f) = \min_{u \in X} J(u)$  gilt:  $\|f^\dagger\|_X \leq \|f\|_X$ .

Die dadurch definierte Abbildung

$$\begin{aligned} A^\dagger : \mathcal{D}(A^\dagger) &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto f^\dagger \end{aligned}$$

wird verallgemeinerte Inverse oder Pseudoinverse <sup>1</sup> von  $A$  genannt.

Für die verallgemeinerte Lösung  $f^\dagger = A^\dagger g$  gilt der folgende Satz:

**Satz 1.0.6**  *$f^\dagger$  ist in  $\overline{\mathcal{R}(A^*)}$  die Lösung der Normalengleichung*

$$A^* A f = A^* g.$$

BEWEIS : in Louis [12].

Ebenfalls in [12] findet man folgende Eigenschaften der verallgemeinerten Inversen :

- $\mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A)^\perp$ ,
- $\mathcal{R}(A)^\dagger = \mathcal{N}(A)^\perp = \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ ,
- $A^\dagger$  ist linear,

---

<sup>1</sup>Der Begriff der Pseudoinversen wurde erstmals 1903 von I. Fredholm im Zusammenhang mit Integralgleichungen betrachtet. Für Matrizen geht die Definition auf E.H.Moore zurück, die er 1920 im Rahmen eines Vortrages als Konzept zur Reziproken einer  $(m \times n)$ -Matrix vorstellte. Nachdem diese Entwicklung weitgehend in Vergessenheit geraten war, entdeckte R.Penrose 1955 unabhängig von der Vorgeschichte die verallgemeinerte Inverse beliebiger Matrizen neu. [9]

- $A^\dagger$  ist genau dann stetig, wenn  $\mathcal{R}(A)$  abgeschlossen ist.

Falls ein Problem schlecht gestellt ist und die Daten fehlerbehaftet sind, so wendet man zu seiner Lösung eine sogenannte Regularisierung an. Diese bietet einen Ersatz für die im allgemeinen fehlende Stetigkeit von  $A^\dagger$  (im Falle  $\dim \mathcal{R}(A) = \infty$ ).

Man definiert Regularisierung wie folgt:

**Definition 1.0.7** Eine Regularisierung von  $A^\dagger$  ist eine Familie von Operatoren

$\{T_\gamma\}_{\gamma>0}; T_\gamma : Y \rightarrow X$  mit folgender Eigenschaft:

Es existiert eine Abbildung  $\gamma : \mathbb{R}_+ \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ , so daß für alle  $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$  und für alle  $g^\epsilon \in Y$  mit  $\|g - g^\epsilon\|_Y \leq \epsilon$  gilt:

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ g^\epsilon \rightarrow g}} T_{\gamma(\epsilon, g^\epsilon)} g^\epsilon = A^\dagger g.$$

Sind alle  $T_\gamma$  linear, so heißt  $\{T_\gamma\}$  eine lineare Regularisierung.  $\gamma$  wird Regularisierungsparameter genannt, den man so wählt, daß

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ g^\epsilon \rightarrow g}} \gamma(\epsilon, g^\epsilon) = 0$$

gilt.

Zum Nachweis der Regularisierungseigenschaft eines Verfahrens betrachtet man den Fehler  $\|T_\gamma g^\epsilon - A^\dagger g\|$ , für den die folgende Ungleichung gilt:

$$\|T_\gamma g^\epsilon - A^\dagger g\| \leq \|T_\gamma g^\epsilon - T_\gamma g\| + \|T_\gamma g - A^\dagger g\|.$$

Der erste Summand der rechten Seite berücksichtigt den Datenfehler, liefert also gegebenenfalls Stabilität für gestörte Daten. Der zweite Summand gibt den Approximationsfehler an. Als Regularisierungsverfahren seien das Tikhonov-Phillips Verfahren, die abgeschnittene Singulärwertzerlegung, Regularisierung mittels Mollifier und Iterationsverfahren, zu denen auch die in dieser Arbeit behandelte Landweber-Iteration zählt, genannt. Regularisierung erreicht man hierbei über die Anzahl der durchgeführten Iterationsschritte. Zusatzinformationen über die mögliche Lösung  $f$  können helfen, die Konvergenz des Verfahrens zu verbessern. Sie werden im folgenden eine wichtige Rolle spielen.

# Kapitel 2

## Konvex-restringierte schlecht gestellte Probleme & Tikhonov-Regularisierung

In diesem Abschnitt wird analog zu Kapitel 1 eine auf eine abgeschlossene, konvexe Menge  $C$  *restringierte verallgemeinerte Inverse*  $A_C^\dagger$  eingeführt. Es wird gezeigt, daß sich nur wenige Eigenschaften des unrestringierten Problems auf den nichtlinearen Operator  $A_C^\dagger$  übertragen lassen. Die vorgestellten Eigenschaften stammen aus [4] und [6].

### 2.1 Einige Eigenschaften von $A_C^\dagger$

Wie zuvor sei  $A$  ein linearer, beschränkter Operator zwischen den reellen Hilberträumen  $X$  und  $Y$ ,  $C$  sei eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von  $X$ . Wieder wird  $J(f) = \|Af - g\|_Y$  minimiert, jedoch mit der Einschränkung, daß  $f$  in  $C$  enthalten sein muß. Die Eindeutigkeit der Lösung, falls sie existiert, wird durch die Wahl der Lösung  $f$  kleinster Norm gewährleistet. Wir bezeichnen sie mit  $A_C^\dagger g$ . Sie heißt *restringierte verallgemeinerte Inverse* (auch Quasilösung). Der folgende Satz beschreibt die Eigenschaften des nichtlinearen Operators  $A_C^\dagger$ .  $P_C$  steht für die metrische Projektion auf eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge  $C$ . Metrische Projektion bedeutet, daß jedem Element des Hilbertraumes das eindeutig bestimmte, nächstgelegene Element von  $C$  zugeordnet wird. Im Anhang ist eine Übersicht über die Eigenschaften von

Projektoren aufgeföhrt.

In der Folge werde  $\min_{f \in C} \|Af - g\|$  mit  $(P)$  bezeichnet.

**Satz 2.1.1**  $A_C^\dagger$  besitzt folgende Eigenschaften:

- a)  $AA_C^\dagger = P_{\overline{A(C)}}$  auf  $\mathcal{D}(A_C^\dagger)$ .
- b)  $\mathcal{D}(A_C^\dagger) = \{g \in Y \mid P_{\overline{A(C)}}g \in A(C)\}$ .
- c)  $A_C^\dagger = A_C^\dagger P_{\overline{A(C)}} = A_C^\dagger P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}$  auf  $\mathcal{D}(A_C^\dagger)$ .
- d)  $f - A_C^\dagger Af \in \mathcal{N}(A)$  für alle  $f \in C$ .
- e) Für Unterräume  $C$  ist  $A_C^\dagger = (AP_C)^\dagger$ .
- f) Für beschränkte Mengen  $C$  ist  $\mathcal{D}(A_C^\dagger) = Y$ .

BEWEIS :

a) Für  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$  gilt nach Definition:

$$\|AA_C^\dagger g - g\| = \min_{f \in C} \|Af - g\| = \min_{\mu \in A(C)} \|\mu - g\| = \min_{\mu \in \overline{A(C)}} \|\mu - g\|.$$

Dies entspricht aber der Definition der metrischen Projektion auf  $\overline{A(C)}$ , das heißt, daß  $g$  der eindeutig bestimmte, nächstgelegene Punkt in  $\overline{A(C)}$  zugeordnet wird. Somit gilt also:

$$P_{\overline{A(C)}}g = AA_C^\dagger g.$$

b) [siehe auch Neubauer [19] Proposition 2.2]

Ist  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$ , dann gilt nach a) :  $P_{\overline{A(C)}}g = AA_C^\dagger g \in A(C)$ . Ist  $P_{\overline{A(C)}}g \in A(C)$ , also  $P_{\overline{A(C)}}g = A\phi$  mit  $\phi \in C$ , dann folgt:

$$\inf_{f \in C} \|Af - g\| = \inf_{\mu \in A(C)} \|\mu - g\| = \inf_{\mu \in \overline{A(C)}} \|\mu - g\| = \|A\phi - g\|.$$

Damit existiert  $\min_{f \in C} \|Af - g\|$ , und es gilt  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$ .

c) Zu zeigen ist:  $A_C^\dagger g = A_C^\dagger P_{\overline{A(C)}}g$ .  $A_C^\dagger g$  minimiert  $\|Af - g\|$  für  $f \in C$ . Somit minimiert es auch  $\|Af - P_{\overline{A(C)}}g\|$ , weil  $Af \in A(C)$  für alle  $f \in C$  gilt. Es folgt:  $A_C^\dagger g = A_C^\dagger P_{\overline{A(C)}}g$ . Ferner ist zu zeigen, daß  $A_C^\dagger g = A_C^\dagger P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}g$ .

Der Satz von Pythagoras liefert:

$$\|Af - g\|^2 = \|Af - P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}g\|^2 + \|P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}g - g\|^2$$

mit festem zweitem Term.

d) Für alle  $g \in A(C)$  und  $f \in C$  folgt nach Teil a)  $AA_C^\dagger g = P_{A(C)}g$ . Man erhält dann zusammen mit b) die Behauptung wie folgt:

$$\begin{aligned} A(f - A_C^\dagger Af) &= Af - AA_C^\dagger Af \\ &= Af - P_{A(C)}Af = Af - Af = 0. \end{aligned}$$

e) Es gilt:  $\mathcal{D}((AP_C)^\dagger) = A(C) \oplus A(C)^\perp = \{g \in Y \mid P_{A(C)}g \in A(C)\} = \mathcal{D}(A_C^\dagger)$ .

Für  $g \in \mathcal{D}((AP_C)^\dagger)$  ist  $(AP_C)^\dagger g$  nach Definition das Element kleinster Norm von:  $\{f \in X \mid \|AP_C f - g\| = \min_{\phi \in C} \|A\phi - g\|\} = \{f \in X \mid AP_C f = P_{A(C)}g\} = \{\phi \in C \mid A\phi = P_{A(C)}g\} \oplus C^\perp$ , da  $AP_C f = AP_C(\phi + \phi')$  mit  $\phi \in C$  und  $\phi' \in C^\perp$  gilt. Somit ist  $(AP_C)^\dagger g$  auch das Element kleinster Norm von  $\{\phi \in C \mid A\phi = P_{A(C)}g\}$ , also gleich  $A_C^\dagger g$ .

f)  $A$  ist linearer Operator. Da die Menge  $C$  beschränkt, abgeschlossen und konvex ist, folgt für  $C$  schwache Folgenabgeschlossenheit. Daraus erhält man die Abgeschlossenheit von  $A(C)$ , weil  $Af_n \rightarrow g, f_n \in C$  die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge von  $f_n$  impliziert, deren Grenzwert in der Menge  $C$  liegt.

Aus  $f_{n_k} \rightarrow f$  folgt  $Af_{n_k} \rightarrow Af$  und damit  $g = Af \in A(C)$ .

Gemäß b) folgt die Behauptung.  $\square$

In den weiter unten zu führenden Beweisen benötigt man die Umformulierung des restringierten Minimierungsproblems zu einer Variationsungleichung. Das folgende Lemma geht darauf ein.

**Lemma 2.1.2** *Es sei  $G = \{x \mid x = A_C^\dagger g + v, v \in \mathcal{N}(A)\}$ .*

a) *Für  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$  folgt, daß  $G \cap C$  Lösungsmenge von*

$$(A^*Ax - A^*g, x - y) \leq 0 \quad \forall y \in C \text{ in } C \text{ ist.}$$

b) *Wenn  $(A^*Ax - A^*g, x - y) \leq 0 \forall y \in C$  lösbar ist in  $C$ , dann gilt:  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$ .*

**BEWEIS :**

a) Jedes  $x \in G \cap C$  ist minimierendes Element von  $(P)$  und löst damit die Variationsungleichung, denn für  $y \in C, \lambda \in [0, 1]$  ist

$$0 \leq \|A(\lambda x + (1-\lambda)y) - g\|^2 - \|Ax - g\|^2 = 2(1-\lambda)(A^*Ax - A^*g, y - x) + (1-\lambda)^2 \|A(y - x)\|^2.$$



Für  $\lambda \rightarrow 1$  folgt die Variationsungleichung.

Sind  $x_1, x_2 \in C$  Lösungen, dann erhält man durch Addition von

$$(A^*Ax_1 - A^*g, x_1 - x_2) \leq 0 \text{ und } (A^*g - A^*Ax_2, x_1 - x_2) \leq 0$$

das Ergebnis

$$\|A(x_1 - x_2)\|^2 \leq 0.$$

Also folgt, daß  $x_1 - x_2 \in \mathcal{N}(A)$ .

b) Ist  $x$  Lösung, dann gilt für  $y \in C$  :

$$\begin{aligned} \|Ay - g\|^2 - \|Ax - g\|^2 &= 2(A^*Ax - A^*g, y - x) + \|A(y - x)\|^2 \geq 0 \\ \implies \|Ay - g\|^2 &\geq \|Ax - g\|^2. \end{aligned}$$

Also ist  $x$  Lösung von  $\min_{f \in C} \|Af - g\|$ , das heißt,  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$ .  $\square$

## 2.2 Das Bild von $A_C^\dagger$

Es stellen sich auch im Bild von  $A_C^\dagger$  Unterschiede zu  $A^\dagger$  ein:  $\mathcal{R}(A_C^\dagger)$  ist zum Beispiel im Gegensatz zu  $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A)^\perp$  im allgemeinen nicht abgeschlossen.

**Satz 2.2.1** Für das Bild von  $A_C^\dagger$  gilt:

- a)  $\mathcal{R}(A_C^\dagger) = \{f \in C \mid A_C^\dagger A f = f\}$ .
- b)  $\mathcal{R}(P_C A^*) \subseteq P_C(\mathcal{N}(A)^\perp)$ .
- c)  $P_C(\mathcal{N}(A)^\perp) \subseteq \mathcal{R}(A_C^\dagger)$ .
- d)  $\mathcal{R}(A_C^\dagger) \subseteq \overline{\mathcal{R}(P_C A^*)}$ .
- e)  $\overline{\mathcal{R}(P_C A^*)} = \overline{P_C(\mathcal{N}(A)^\perp)}$ .

BEWEIS : [5]

a) Zu  $f \in \mathcal{R}(A_C^\dagger)$  existiert ein  $g \in A(C)$  mit  $A_C^\dagger g = f$ . Nach Satz 2.1.1 folgt:

$$A_C^\dagger A f = A_C^\dagger A A_C^\dagger g = A_C^\dagger P_{A(C)} g = A_C^\dagger g = f.$$

b) Es ist  $P_C A^* f \in P_C(\mathcal{N}(A)^\perp)$ , da  $A^* f \in \mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(A)^\perp$  gilt.

Falls  $C = X$  und  $\mathcal{R}(A^*) \neq \overline{\mathcal{R}(A^*)}$  folgt die echte Inklusion.

c) Seien  $f \in P_C(\mathcal{N}(A)^\perp)$ ,  $f \in C$ ,  $P_C z := f$  für  $z \in \mathcal{N}(A)^\perp$ . Dann ist  $f = A_C^\dagger A f$  [[5] Bem (iv) zu Satz 3.5]. Falls  $f$  minimale Norm besitzt, gilt  $f \in \mathcal{R}(A_C^\dagger)$ . Die minimale Norm von  $f$  folgt jedoch aus der Definition der metrischen Projektion, wenn  $\phi \in C$  und  $A f = A \phi$ :

$$0 \leq (\phi - P_C z, P_C z - z) = (\phi - f, f - z) = (\phi - f, f) - (\phi - f, z) = (\phi - f, f),$$

da  $\phi - f \in \mathcal{N}(A)$ ,  $z \in \mathcal{N}(A)^\perp$  gilt.

Die Cauchy Schwarzsche Ungleichung liefert:

$$0 \leq (\phi - f, f) = -(f, f) + (\phi, f) \leq -\|f\|^2 + \|\phi\| \|f\|, \quad \text{womit } \|f\| \leq \|\phi\| \text{ also } f \in \mathcal{R}(A_C^\dagger)$$

folgt.

d) Es ist zu zeigen:  $\mathcal{R}(A_C^\dagger) \subseteq \overline{\mathcal{R}(P_C A^*)}$ .

Nach Satz 2.3.1 (weiter unten) gilt:  $A_C^\dagger g = \lim_{\gamma \rightarrow 0} T_{\gamma, C} g$ , wobei  $T_{\gamma, C} g \in \mathcal{R}(P_C A^*)$ .

$\mathcal{R}(A_C^\dagger)$  ist nicht notwendig abgeschlossen, wie Beispiel 3.10 in [5] zeigt.

e) Von linearen Abbildungen  $A : X \rightarrow Y$  weiß man:  $\mathcal{N}(A)^\perp = \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ .  $\overline{f(M)} = \overline{f(\overline{M})}$  gilt für alle stetigen Abbildungen  $f$  und alle Mengen  $M$  in topologischen Räumen.  $\square$

ANMERKUNG :

a)  $A$  ist injektiv auf  $\mathcal{R}(A_C^\dagger)$ , denn nach Satz 2.1.1 a) folgt für  $AA_C^\dagger g_1 = AA_C^\dagger g_2$  :

$$A_C^\dagger g_1 = A_C^\dagger AA_C^\dagger g_1 = A_C^\dagger AA_C^\dagger g_2 = A_C^\dagger g_2.$$

Beispiel 3.10 in Eicke [5] zeigt, daß  $A$  auf  $\overline{\mathcal{R}(A_C^\dagger)}$  nicht injektiv und  $\mathcal{R}(A_C^\dagger)$  selbst für abgeschlossenes  $\mathcal{R}(A)$  nicht abgeschlossen sein muß.

b) In Eicke [5] werden in Kapitel 3.3 Kriterien für die Korrektgestelltheit restringierter Probleme zusammengestellt. Es zeigt sich, daß die Stetigkeit von  $A_C^\dagger$ , also die Korrektgestelltheit, nur für starke Forderungen an den Operator  $A$  und die Menge  $C$  gewährleistet ist.

c) Natterer stellt in [17] die Frage, inwieweit Datenfehler durch die Restriktion mehr verstärkt werden als im unrestringierten Fall insbesondere auch für  $A_C^\dagger g \in C$ . Er führt dazu ein von Mario Primicerio vorgeschlagenes Beispiel auf, bei dem

$$\|A_C^\dagger g^\epsilon - A_C^\dagger g\| > \|A_C^\dagger g^\epsilon - A_C^\dagger g\| \text{ für } A_C^\dagger g \in C \text{ gilt.}$$

d) Storey und Chapron geben in [24] Bedingungen an, unter welchen ein restringiertes, lineares Problem eine Lösung besitzt.

e) In Kapitel 5.4 in [6] untersuchen Engl, Hanke und Neubauer die Auswirkung von

konvexen Restriktionen auf das Konvergenzverhalten der Tikhonov-Regularisierung.

## 2.3 Tikhonov-Regularisierung restringierter Probleme

Um die Eigenschaften der im folgenden angeführten Iterationsverfahren zur Lösung konvex-restringierter Probleme besser verstehen zu können, enthält dieser Abschnitt grundlegende Ergebnisse der Tikhonov-Regularisierung. Sie ist definiert als Lösung des Minimierungsproblems:

$$\min_{f \in C} \|Af - g\|^2 + \gamma \|f\|^2.$$

$C$  ist dabei eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von  $X$ ;  $g \in Y$ ;  $\gamma > 0$ .

### Satz 2.3.1

a) Konvergenz für exakte Daten:

$g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$  gilt genau dann, wenn  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} T_{\gamma, C} g$  existiert. Dann konvergiert  $T_{\gamma, C} g$  gegen  $A_C^\dagger g$ :  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} T_{\gamma, C} g = A_C^\dagger g$ .

b) Glattheitsbedingung:

Die Tikhonov-regularisierten Lösungen erfüllen eine gewisse Glattheitsbedingung:

$$T_{\gamma, C} g \in \mathcal{R}(P_C A^*)^1.$$

c) Konvergenzordnung bei Kenntnis von Zusatzinformationen bei exakten Daten:

Wenn  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$ ,  $u \in X$  und  $A_C^\dagger g = P_C A^* u \in \mathcal{R}(P_C A^*)$ , dann gilt:

$$\|T_{\gamma, C} g - A_C^\dagger g\| \leq \sqrt{\gamma} \|u\|$$

und

$$\|A(T_{\gamma, C} g - A_C^\dagger g)\| \leq \gamma \|u\|.$$

d) stetige Abhängigkeit vom Regularisierungsparameter:

Für alle  $\gamma, \delta > 0$  und  $g \in Y$  gilt:

---

<sup>1</sup>[siehe auch [6] Bemerkung 5.22]

$$\|T_{\gamma,C}g - T_{\delta,C}g\| \leq \frac{|\gamma-\delta|}{\delta} \|T_{\gamma,C}g\|.$$

e) Monotonie:

Für  $g \in Y$  ist  $\|T_{\gamma,C}g\|$  monoton fallend in  $\gamma$ .

f) Konvergenz für gestörte Daten mit a-priori-Parameterwahl:

Es sei  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$ . Für  $\{g^\epsilon\}_{\epsilon>0} \subseteq Y$  und eine Funktion  $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  gelte:

$$\|P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}(g - g^\epsilon)\| \leq \epsilon, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^2}{\Gamma(\epsilon)} = 0.$$

Dann ist

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_{\Gamma(\epsilon),C}g^\epsilon = A_C^\dagger g.$$

g) Konvergenz für gestörte Daten bei Glattheitsbedingung:

Sei  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$  mit  $A_C^\dagger g \in \mathcal{R}(P_C A^*)$  und  $\tau > 1$ . Für  $\{g^\epsilon\}_{\epsilon>0} \subseteq Y$  sei  $\|P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}(g^\epsilon - g)\| \leq \epsilon$ . Dann gilt für  $\Gamma(\epsilon) := \sup\{\Gamma > 0 \mid \|AT_\Gamma g^\epsilon - g^\epsilon\| \leq \tau\epsilon\}$ :

$$\|T_{\Gamma(\epsilon),C}g^\epsilon - A_C^\dagger g\| = O(\sqrt{\epsilon}).$$

BEWEIS :

a) Neubauer [19] Theorem 2.4.

b) Michelli Utreras [15] Theorem 3.1: Best smoothing in a convex set.

c) Neubauer [19] Theorem 4.2.

d), e) Neubauer [19] Theorem 1.7.

f) Neubauer [20] Theorem 2.7.

g) Engl, Hanke und Neubauer [6] Proposition 5.26.  $\square$

Satz 2.3.1 liefert wichtige Eigenschaften der Tikhonov-Regularisierung. Interessant für die Stabilität des Verfahrens ist besonders Aussage g), die eine Konvergenzrate angibt. Die Voraussetzung  $A_C^\dagger g \in \mathcal{R}(P_C A^*)$  spielt eine entscheidende Rolle.

## 2.4 Die Landweber-Iteration

Im nächsten Kapitel werden Methoden zur Lösung restringierter Probleme angegeben. Diese basieren auf der Iterationsvorschrift des Landweber-Verfahrens, die nun kurz vorgestellt werden soll.

Die meisten Iterationsverfahren zur Näherung von  $A^\dagger g$  beruhen auf der Umformung der Normalengleichung  $A^*Af = A^*g$  zu einer Fixpunktgleichung:

$$f = f + A^*(g - Af).$$

Für  $\|A\|^2 < 2$  ist der Fixpunktoperator  $(I - A^*A)$  nichtexpansiv. Für schlecht gestellte Probleme ist dieser Operator jedoch keine Kontraktion. Man führt bei der Landweber-Iteration den Relaxationsparameter  $\beta$  mit  $0 < \beta < \frac{2}{\|A\|^2}$  ein.

Somit erhält man:

$$f_{n+1} = f_n + \beta A^*(g - Af_n).$$

# Kapitel 3

## Iterationsverfahren zur Lösung restringierter Probleme

In diesem Abschnitt werden drei Iterationsverfahren zur Lösung restringierter Probleme vorgestellt. Sie werden eingesetzt zur Regularisierung, nicht zur Lösung bereits (zum Beispiel durch Tikhonov-Verfahren) regularisierter Probleme. Im ersten Abschnitt wird die projizierte Landweber-Iteration untersucht. Der zweite Abschnitt enthält eine Modifikation für den Fall, daß die restringierte verallgemeinerte Inverse einer gewissen Glattheitsbedingung genügt. Schließlich wird im letzten Teil auf ein nichtstationäres Verfahren eingegangen.

### 3.1 Die projizierte Landweber-Iteration

Untersucht werden zunächst Verfahren der Form:

$$(V) \quad f_0 \text{ beliebig, } f_{n+1} = P_C U f_n = (P_C U)^{n+1} f_0.$$

Der Operator  $U$  ist dabei nur von  $A$  und  $g$ , jedoch nicht von der Menge  $C$  abhängig. Die Verwendung von (V) bietet sich an, falls sich der Projektor  $P_C$  einfach darstellen läßt.

Iterationsverfahren besitzen eine “Selbstregularisierungseigenschaft”, das heißt, daß bei gestörten Daten ein Problem durch frühen Abbruch der Iteration ohne weiteren Eingriff bereits regularisiert wird.

**Satz 3.1.1** Sei  $G = \{x \mid x = A_C^\dagger g + v, v \in \mathcal{N}(A)\}$ . Die Menge der Fixpunkte der Iterationsabbildung  $(V)$  ergibt sich dann zu:

$$\text{Fix}(P_C U) = \begin{cases} G \cap C & \text{für } g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger) \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} .$$

BEWEIS :

Für einen Fixpunkt  $x$  von  $P_C U$  gilt:

$x = P_C Ux \iff x \in C, (Ux - x, x - y) = (Ux - P_C Ux, x - y) \geq 0 \quad \forall y \in C$  gemäß den Eigenschaften der Projektion. Nach Lemma 2.1.2 folgt die Behauptung.  $\square$

Bei den vorgestellten Verfahren entspricht  $U$  der Iterationsabbildung des Landweber-Verfahrens:  $Uf = (I - \beta A^* A)f + \beta A^* g; \quad 0 < \beta < 2\|A\|^{-2}$ .

Daraus ergibt sich für das Verfahren 1:

$$\begin{aligned} \text{(V1)} \quad & \text{Startwert } f_0 \text{ beliebig, } 0 < \beta < 2\|A\|^{-2} \\ & f_{n+1} = P_C Uf_n = P_C [(I - \beta A^* A)f_n + \beta A^* g]. \end{aligned}$$

Für  $C = X$  erhält man die herkömmliche Landweber-Iteration. Da im allgemeinen weder  $P_C$  noch  $U$  Kontraktionen sind, läßt sich die starke Konvergenz von (V1) nur schwer zeigen. Andererseits gilt jedoch das folgende Lemma.

**Lemma 3.1.2** Die oben definierten  $P_C$  und  $U$  erfüllen:

a)  $P_C$  ist nichtexpansiv, das heißt:

$$\begin{aligned} \|P_C x - P_C y\|^2 &\leq \|x - y\|^2 - \|(I - P_C)x - (I - P_C)y\|^2 \\ \iff \|P_C x - P_C y\|^2 &\leq (x - y, P_C x - P_C y). \end{aligned}$$

b)  $U$  ist nichtexpansiv, das heißt:

$$\|Ux - Uy\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \left(\frac{2}{\beta\|A\|^2} - 1\right)\|(I - U)x - (I - U)y\|^2.$$

c)  $P_C U$  ist nichtexpansiv, das heißt:

$$\|P_C Ux - P_C Uy\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \left(1 - \frac{\beta\|A\|^2}{2}\right)\|(I - P_C U)x - (I - P_C U)y\|^2.$$

**BEWEIS :**

a) Für Projektoren gilt die Ungleichung:  $((I - P_C)x, P_C x - P_C y) \geq 0 \quad \forall y \in X$  [vgl. Anhang].

$$1. ((I - P_C)x, P_C(x - y)) \geq 0$$

$$2. ((I - P_C)y, P_C(y - x)) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$$

Die Subtraktion 1.-2. liefert:  $((I - P_C)x - (I - P_C)y, 2P_C(x - y)) \geq 0$ ,

$$\text{also } ((I - P_C)x - (I - P_C)y, P_C(x - y)) \geq 0$$

$$\iff ((I - P_C)x - (I - P_C)y, -P_C(x - y)) \leq 0 \quad (3.1.1)$$

$$\iff \|(I - P_C)(x - y)\|^2 - ((I - P_C)(x - y), x - y) \leq 0$$

$$\iff \|(I - P_C)(x - y)\|^2 - \|x - y\|^2 + (P_C(x - y), x - y) \leq 0.$$

Damit ist die Behauptung erfüllt, denn (3.1.1) ist äquivalent zu:

$$-(x - y, P_C(x - y)) + (P_C(x - y), P_C(x - y)) \leq 0,$$

$$\text{womit } (P_C(x - y), x - y) \geq \|P_C(x - y)\|^2 \text{ folgt.}$$

Dies impliziert auch die äquivalente Formulierung von a).

b) Formuliert man  $\|Ux - Uy\|^2$  aus, so erhält man:

$$\|Ux - Uy\|^2$$

$$= (I(x - y) - \beta A^* A(x - y), I(x - y) - \beta A^* A(x - y))$$

$$= (x - y, x - y) - 2(I(x - y), \beta A^* A(x - y)) + \beta^2 (A^* A(x - y), A^* A(x - y))$$

$$= \|x - y\|^2 - 2\beta (A(x - y), A(x - y)) + \beta^2 \|A^* A(x - y)\|^2$$

$$= \|x - y\|^2 - 2\beta \|A(x - y)\|^2 + \beta^2 \|A^* A(x - y)\|^2.$$



Die Behauptung lautet:

$$\begin{aligned} \|Ux - Uy\|^2 &\leq \|x - y\|^2 - \left(\frac{2}{\beta\|A\|^2} - 1\right)\|(I - U)x - (I - U)y\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - \left(\frac{2}{\beta\|A\|^2} - 1\right)\|\beta A^*A(x - y)\|^2. \end{aligned}$$

Sie ist erfüllt, falls

$$\left(\frac{2}{\beta\|A\|^2} - 1\right)\|\beta A^*A(x - y)\|^2 \leq 2\beta\|A(x - y)\|^2 - \beta^2\|A^*A(x - y)\|^2.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\beta\|A\|^2} - 1\right)\|\beta A^*A(x - y)\|^2 &= \left(\frac{2\beta}{\|A\|^2} - \beta^2\right)\|A^*A(x - y)\|^2 \\ &= \frac{2\beta}{\|A\|^2}\|A^*A(x - y)\|^2 - \beta^2\|A^*A(x - y)\|^2 \\ &\leq \frac{2\beta}{\|A\|^2}\|A^*\|^2\|A(x - y)\|^2 - \beta^2\|A^*A(x - y)\|^2. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung erfüllt, da  $\|A^*\| = \|A\|$ .

c) Setze  $k := \frac{2}{\beta\|A\|^2} - 1$ . Aus a) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \|P_C Ux - P_C Uy\|^2 &\leq \|Ux - Uy\|^2 - \|(I - P_C)Ux - (I - P_C)Uy\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 - k\|(I - U)x - (I - U)y\|^2 \\ &\quad - \|[ (I - P_C U)x - (I - P_C U)y ] - [ (I - U)x - (I - U)y ]\|^2. \end{aligned}$$

Mit der Identität  $k\|u\|^2 + \|v - u\|^2 = \|\sqrt{k+1}u - \frac{1}{\sqrt{k+1}}v\|^2 + (1 - \frac{1}{k+1})\|v\|^2$  folgt:

$$\begin{aligned} \|P_C Ux - P_C Uy\|^2 &\leq \|x - y\|^2 - [ \|\sqrt{k+1}((I - U)x - (I - U)y) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{k+1}}((I - P_C U)x - (I - P_C U)y)\|^2 \\ &\quad + (1 - \frac{1}{k+1})\|(I - P_C U)x - (I - P_C U)y\|^2 ] \\ &\leq \|x - y\|^2 - (1 - \frac{1}{k+1})\|(I - P_C U)x - (I - P_C U)y\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - (1 - \frac{\beta\|A\|^2}{2})\|(I - P_C U)x - (I - P_C U)y\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 3.1.1 gibt die Menge der Fixpunkte von  $P_C U$  an. Der folgende Satz liefert Aussagen über die Konvergenz von  $(V1)$ . Zu seinem Beweis wird der folgende Hilfssatz benötigt:

**Hilfssatz (nach Browder [3]):** Jede nichtexpansive Selbstabbildung  $T_f$  einer nichtleeren, beschränkten, abgeschlossenen, konvexen Teilmenge  $C$  eines gleichmäßig konvexen Raumes hat einen Fixpunkt.

**Satz 3.1.3** Für beliebiges  $f_0$  erfüllen die Iterierten des Verfahrens (V1) :

- a)  $f_n$  ist beschränkt (für ein  $f_0$ ) genau dann, wenn  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$ .
- b)  $\|Af_{n+1} - g\|^2 \leq \|Af_n - g\|^2 - (\frac{2}{\beta} - \|A\|^2)\|f_{n+1} - f_n\|^2$ .
- c) Für  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$  fällt der Defekt  $\|Af_n - g\|$  monoton gegen  $\text{dist}(A(C), g)$ .
- d)  $\|f_{n+1} - A_C^\dagger g\|^2 \leq \|f_n - A_C^\dagger g\|^2 - (1 - \frac{\beta\|A\|^2}{2})\|f_{n+1} - f_n\|^2$  für  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$ .
- e) Für  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$  konvergiert die Folge  $\{f_n\}$  schwach gegen einen Fixpunkt von  $P_C U$ .
- f) Jeder Häufungspunkt von  $\{f_n\}$  ist Fixpunkt. Gibt es eine konvergente Teilfolge, so konvergiert die ganze Folge.

BEWEIS :

a)

" $\Leftarrow$ ":  $P_C U$  ist nichtexpansiver Operator, also gilt:

$$\|(P_C U)^{n+1} f_0 - A_C^\dagger g\| \leq \|(P_C U)^n f_0 - A_C^\dagger g\| \leq \|f_0 - A_C^\dagger g\|.$$

" $\Rightarrow$ ": [3] Zum Beweis wird der vorhergehende Hilfssatz betrachtet. Sei  $d$  der Durchmesser der Menge  $f_n$ , und für jedes  $f \in X$  sei  $\mathcal{B}_d(f)$  die abgeschlossene Kugel mit Radius  $d$  um  $f$ . Wenn  $C_k := \bigcap_{j \geq k} \mathcal{B}_d(f_j)$  ist, ist  $C_k$  nichtleer und konvex für jedes  $k$  und  $T_f(C_k) \subset C_{k+1}$ .  $C$  bezeichne den Abschluß der Vereinigung der  $C_k$  für  $k \geq 1$ . Da  $C_k$  mit  $k$  wächst, ist  $C$  eine abgeschlossene, beschränkte, konvexe Teilmenge von  $X$ . Weil  $T_f$   $C$  in  $C$  abbildet, besitzt  $T_f$  einen Fixpunkt in  $C$ . Nach Satz 3.1.1 folgt die Behauptung.

b) Es gilt zunächst:

$$\begin{aligned} \|f_{n+1} - f_n\|^2 &= \|P_C[(I - \beta A^* A)f_n + \beta A^* g] - f_n\|^2 \\ &\leq -\beta(A^* A f_n - A^* g, f_{n+1} - f_n) \quad (3.1.2) \quad [\text{vgl. Anhang}]. \end{aligned}$$

Für die Differenz  $\|Af_{n+1} - g\|^2 - \|Af_n - g\|^2$  erhält man:

$$\begin{aligned} &\|Af_{n+1} - g\|^2 - \|Af_n - g\|^2 \\ &= (Af_{n+1} - g, Af_{n+1} - g) - (Af_n - g, Af_n - g) \\ &= (A^* A f_{n+1} - A^* g, f_{n+1}) - (A f_{n+1}, g) + (g, g) - (A^* A f_n - A^* g, f_n) + (A f_n, g) - (g, g) \\ &= (A^* A f_{n+1}, f_{n+1}) - (A^* g, f_{n+1}) - (f_{n+1}, A^* g) - (A^* A f_n, f_n) + (A^* g, f_n) + (A^* g, f_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2(A^*g, f_{n+1} - f_n) + (A^*Af_{n+1}, f_{n+1}) - (A^*Af_n, f_n) \\
&= 2(A^*Af_n - A^*g, f_{n+1} - f_n) - 2(A^*Af_n, f_{n+1} - f_n) + (A^*Af_{n+1}, f_{n+1}) - (A^*Af_n, f_n) \\
&= 2(A^*Af_n - A^*g, f_{n+1} - f_n) - (A^*Af_n, 2f_{n+1} - f_n) + (A^*Af_{n+1}, f_{n+1}) \\
&= 2(A^*Af_n - A^*g, f_{n+1} - f_n) + (A^*A(f_{n+1} - f_n), f_{n+1} - f_n) \quad (3.1.3).
\end{aligned}$$

Für den ersten Summanden gilt nach (3.1.2):

$$2(A^*Af_n - A^*g, f_{n+1} - f_n) \leq -\frac{2}{\beta}\|f_{n+1} - f_n\|^2.$$

Für den zweiten Summanden gilt:

$$\begin{aligned}
(A^*A(f_{n+1} - f_n), f_{n+1} - f_n) &\leq \|A\|^2\|f_{n+1} - f_n\|^2 \\
\implies \|Af_{n+1} - g\|^2 - \|Af_n - g\|^2 &\leq -\frac{2}{\beta}\|f_{n+1} - f_n\|^2 + \|A\|^2\|f_{n+1} - f_n\|^2.
\end{aligned}$$

c) (durch Widerspruch)

Die Behauptung b) gewährleistet, daß der Defekt monoton gegen ein  $c \geq 0$  konvergiert.

Stimmt sie nicht, so existiert ein  $\phi \in C$  mit  $\|A\phi - g\| < c$ , und es gilt folgendes:

$$0 \geq \|A\phi - g\|^2 - c^2 \geq \|A\phi - g\|^2 - \|Af_n - g\|^2.$$

Mit der Gleichung (3.1.3) folgt:

$$\begin{aligned}
\|A\phi - g\|^2 - \|Af_n - g\|^2 &= 2(A^*Af_n - A^*g, \phi - f_n) + (\phi - f_n, A^*A(\phi - f_n)) \\
&= 2(A^*Af_n - A^*g, \phi - f_n) + \|A(\phi - f_n)\|^2 \\
&\geq 2(A^*Af_n - A^*g, \phi - f_n) \\
&= 2\left[\frac{1}{\beta}((I - \beta A^*A)f_n + \beta A^*g - \phi, f_{n+1} - \phi) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\beta}(f_n - \phi, f_{n+1} - \phi) + (A^*Af_n - A^*g, f_{n+1} - f_n)\right] \\
&\geq 2\left[\frac{1}{\beta}\|f_{n+1} - \phi\|^2 - \frac{1}{\beta}(f_n - \phi, f_{n+1} - \phi) \right. \\
&\quad \left. + (A^*Af_n - A^*g, f_{n+1} - f_n)\right].
\end{aligned}$$

Da  $(f_{n+1} - \phi, f_{n+1} - \phi) = \|P_C U f_n - \phi\|^2 \leq (U f_n - \phi, P_C U f_n - \phi)$  mit  $f_{n+1} = P_C U f_n$  gilt, erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
\|A\phi - g\|^2 - \|Af_n - g\|^2 &= 2\left[\frac{1}{\beta}(f_{n+1} - f_n, f_{n+1} - \phi) \right. \\
&\quad \left. + (A^*Af_n - A^*g, f_{n+1} - f_n)\right] \\
&= \frac{2}{\beta}(f_{n+1} - \phi + \beta A^*(Af_n - g), f_{n+1} - f_n).
\end{aligned}$$

Der Ausdruck strebt gegen 0 gemäß Ergebnis b)  $\|f_{n+1} - f_n\| \rightarrow 0$  und wegen der Beschränktheit der Folge  $\{f_n\}$ . Dadurch erhält man den Widerspruch.

d) Betrachte Lemma 3.1.2 c), und setze  $x = f_n$  und  $y = A_C^\dagger g$ . Man erhält dann die

Behauptung, da  $A_C^\dagger g$  Fixpunkt von  $P_C U$  ist.

e) Der Beweis dieses Teils erfolgt nach einem Ergebnis von Opial [21]:  $P_C, U, P_C U$  sind nichtexpansiv.  $Fix$  sei die Menge der Fixpunkte von  $P_C U$ . Für  $y \in Fix$  fällt die Folge  $\{\|f_n - y\|\}$ , da  $\|f_{n+1} - y\| = \|P_C U f_n - P_C U y\| \leq \|f_n - y\|$  gilt. Es existiert daher für jedes  $y \in Fix$  ein  $d(y)$  derart, daß  $d(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - y\|$  ist.  $Fix$  ist eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von  $C$ . Die Menge  $Fix_d := \{y \in Fix \mid d(y) \leq d\}$  ist für jedes  $d \geq 0$  eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge von  $Fix$  und nichtleer für hinreichend großes  $d$ . Da  $X$  als Hilbertraum reflexiv ist, gibt es ein kleinstes  $\delta$ , so daß  $Fix_\delta$  nichtleer ist [vgl. [1] S. 163].  $Fix_\delta$  enthält genau ein Element  $y_0$ .

Zu zeigen ist, daß die Folge  $\{f_n\}$  schwach gegen  $y_0$  konvergiert.

Beweis durch Widerspruch:

Aus der Reflexivität von  $X$  und der Beschränktheit von  $\{f_n\}$  folgt die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge  $\{f_{n_i}\}$ , die gegen  $\bar{y}$  konvergiert, wobei  $\bar{y} \neq y_0$ .

Es gilt:  $\{f_{n_i+1} - f_{n_i}\} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , aber  $\{f_{n_i+1} - f_{n_i}\} = \{(P_C U - I)f_{n_i}\}$ , somit ist  $\bar{y} \in Fix$ . Man erhält dann:

$$\delta = d(y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{n_i} - y_0\| > \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{n_i} - \bar{y}\| = d(\bar{y}),$$

denn falls  $\{x_n\}$  schwach konvergent gegen ein  $x_0$  ist, so gilt für alle  $x \neq x_0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|x_n - x\| > \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|x_n - x_0\|.$$

f) Aus

$$(P_C U)^{n_k} f_0 \rightarrow f \text{ für } k \rightarrow \infty$$

folgt einerseits:

$$(P_C U)^{n_k+1} f_0 - (P_C U)^{n_k} f_0 \rightarrow P_C U f - f,$$

andererseits wegen der asymptotischen Regularität:

$$(P_C U)^{n_k+1} f_0 - (P_C U)^{n_k} f_0 \rightarrow 0.$$

Also ist  $f$  Fixpunkt. Damit ist aber  $\|(P_C U)^n f_0 - f\|$  monoton fallend. Die gesamte Folge konvergiert.  $\square$

ANMERKUNG :

Die starke Konvergenz des Verfahrens (V1) gegen einen Fixpunkt kann nur für gewisse Spezialfälle nachgewiesen werden. Wenn  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$  ist, dann tritt starke Konvergenz auf, falls:

- a)  $\mathcal{R}(A)$  abgeschlossen und  $\mathcal{N}(A)$  endlichdimensional ist.
- b)  $(I - \beta A^*A)$  kompakt ist.
- c)  $C$  ist beschränkt kompakt ist.
- d)  $C$  abgeschlossener Unterraum von  $X$  ist.

Die Beweise hierzu findet man in [5] Satz 5.5.

Ein Vorteil der Landweber-Iteration liegt darin, daß man auf einfache Weise Stabilitätsaussagen im Falle gestörter Daten erhalten kann. Der folgende Satz liefert eine Abschätzung für die Differenz der  $n$ -ten Iterierten im ungestörten bzw. gestörten Fall.

**Satz 3.1.4** *Es gelte:  $\|P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}(g - g^\epsilon)\| \leq \epsilon$ . Die Iterierten  $f_n$  (im Falle ungestörter Daten) und  $f_n^\epsilon$  (im Falle gestörter Daten) des Verfahrens (V1) genügen dann der Abschätzung:*

$$\|f_n - f_n^\epsilon\| \leq \|f_{n-1} - f_{n-1}^\epsilon\| + \beta \|A\| \epsilon \leq \|f_0 - f_0^\epsilon\| + n \beta \|A\| \epsilon.$$

BEWEIS :

$$\begin{aligned} \|P_C Ux - P_C U_\epsilon y\| &\leq \|Ux - U_\epsilon y\| = \|(I - \beta A^*A)(x - y) + \beta A^*(g - g^\epsilon)\| \\ &\leq \|x - y\| + \beta \|A^*(P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}(g - g^\epsilon) + P_{\overline{\mathcal{R}(A)^\perp}}(g - g^\epsilon))\| \\ &\leq \|x - y\| + \beta \|A^* P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}(g - g^\epsilon)\| \\ &\leq \|x - y\| + \beta \|A\| \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

## 3.2 Ein Verfahren für “glatte” Lösungen

Die Ergebnisse für die restringierte Tikhonov-Regularisierung aus dem vorherigen Kapitel zeigen, daß die Bedingung  $A_C^\dagger g \in \mathcal{R}(P_C A^*)$  eine sinnvolle, abstrakte Glattheitsbedingung an die Lösung darstellt [vgl. auch [6] Kapitel 5.4]. In [5] in der Bemerkung

zu Satz 5.5 findet man ein Beispiel, bei dem die Iterierten des Verfahrens (V1) nicht notwendig in  $\mathcal{R}(P_C A^*)$  bleiben und somit ihr Grenzwert (falls existent) nicht gleich  $A_C^\dagger g$  sein muß. Aus diesem Grunde führt man das folgende Verfahren ein:

$$\begin{aligned} \text{(V2)} \quad & \text{Startwert } z_0 \in \mathcal{N}(A)^\perp \text{ beliebig,} \quad 0 < \beta < \frac{2}{\|A\|^2} \\ & z_{n+1} = z_n + \beta A^*(g - AP_C z_n), \quad f_n = P_C z_n. \end{aligned}$$

Man erkennt, daß für  $z_0 \in \mathcal{N}(A)^\perp$  bzw.  $z_0 \in \mathcal{R}(A^*)$  die Iterierten  $z_n$  in  $\mathcal{N}(A)^\perp$  bzw. in  $\mathcal{R}(A^*)$  verbleiben. Daher sind die Verfahren (V1) und (V2) im allgemeinen verschieden. Es erweist sich unter Umständen als günstiger, (V2) als

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= w_n + \beta(P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}g - AP_C A^* w_n), \\ f_n &= P_C A^* w_n \end{aligned}$$

mit  $z_0 = A^* w_0 \in \mathcal{R}(A^*)$  zu schreiben.

**Satz 3.2.1** *Es seien  $Tx = x + \beta A^*(g - AP_C x)$  die Iterationsabbildung von (V2) und  $f_n, z_n, w_n, \beta$  definiert wie oben.*

*Dann gelten die folgenden Behauptungen:*

- a)  $\|Af_{n+1} - g\|^2 \leq \|Af_n - g\|^2 - (\frac{2}{\beta} - \|A\|^2)\|f_{n+1} - f_n\|^2$ .
- b)  $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$  genau dann, wenn  $P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}g \in A(C)$ .
- c) Aus  $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$  folgt, daß  $P_C(\text{Fix}(T)) = G \cap C$  mit  $G = \{x \mid x = A_C^\dagger g + v, v \in \mathcal{N}(A)\}$  gilt.
- d) Falls  $Tz = z \in \mathcal{N}(A)^\perp$  gilt, dann ist  $P_C z = A_C^\dagger g$ .
- e) Es seien  $P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}g \in A(C)$  und  $A_C^\dagger g = P_C A^* w \in \mathcal{R}(P_C A^*)$ . Ist  $z_0 = A^* w_0 \in \mathcal{R}(A^*)$ , dann gilt für die oben definierte Folge  $\{w_n\}$ :

$$\|w_{n+1} - w\|^2 \leq \|w_n - w\|^2 - \beta(2 - \beta\|A\|^2)\|f_n - A_C^\dagger g\|^2.$$

*Insbesondere ist  $\{\|w_m - w\|\}$  monoton fallend und  $\{f_n\}$  konvergiert gegen  $A_C^\dagger g$  mit der Abschätzung*

$$\sum_{n=0}^N \|f_n - A_C^\dagger g\|^2 \leq (\beta(2 - \beta\|A\|^2))^{-1}(\|w_0 - w\|^2 - \|w_{N+1} - w\|^2).$$

BEWEIS :

a) Wie im Beweis zu Satz 3.1.3 sieht man folgendes:

$$\begin{aligned}\|f_{n+1} - f_n\|^2 &= \|P_C z_{n+1} - P_C z_n\|^2 \leq (f_{n+1} - f_n, z_{n+1} - z_n) \\ &= \beta(f_{n+1} - f_n, A^*g - A^*Af_n) \text{ [vgl. Anhang].}\end{aligned}$$

Nach demselben Satz gilt die Ungleichung:

$$\begin{aligned}\|Af_{n+1} - g\|^2 - \|Af_n - g\|^2 &= 2(A^*Af_n - A^*g, f_{n+1} - f_n) + (f_{n+1} - f_n, A^*A(f_{n+1} - f_n)) \\ &\leq (\|A\|^2 - \frac{2}{\beta})\|f_{n+1} - f_n\|^2.\end{aligned}$$

b) " $\implies$ " :  $Tx = x$  ist äquivalent zu:  $x = x + \beta A^*(g - AP_C x)$ . Somit erhält man:  $A^*(g - AP_C x) = 0$  und  $P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}g \in A(C)$  [vgl. Beweis zu Satz 3.1.4].

" $\impliedby$ " : Wenn  $P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}g \in A(C)$  gilt, dann ist  $Tx = x$ , also  $Fix(T) \neq \emptyset$ .

c) Behauptung b) des Satzes gewährleistet, daß  $P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}g \in A(C)$  ist, somit gilt die Gleichheit  $P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}g = P_{A(C)}^\dagger g$ , also  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$ .

" $\subseteq$ " : Es sei  $f = P_C z$ , wobei  $z$  Fixpunkt von  $(V_2)$  ist, also  $Tz = z$ . Es ergibt sich  $A^*(g - AP_C z) = A^*(g - Af) = 0$  und damit

$$Af = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}g = P_{A(C)}^\dagger g = AA_C^\dagger g \text{ [vgl. Satz 2.1.1].}$$

Zusammen erhält man  $Af = AA_C^\dagger g$  und  $f - A_C^\dagger g \in \mathcal{N}(A)$ .

Setzt man  $P_C z$  für  $f$  ein, so führt das zu:  $f - A_C^\dagger g = P_C z - A_C^\dagger g \in \mathcal{N}(A)$ .

" $\supseteq$ " : Sei  $f \in C$  mit  $A_C^\dagger g - f \in \mathcal{N}(A)$ .

$$\text{Dann gilt die Gleichheit: } Af = AA_C^\dagger g = P_{A(C)}^\dagger g = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}g.$$

Zusammen erhält man:  $Tf = f$  und  $f \in P_C(Fix(T))$ .

d) Für einen Fixpunkt  $z$  gilt nach Teil b):  $P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}g = AP_C z$ .

Aus Satz 2.2.1 a) und 2.1.1 c) folgt:

$$P_C z \in \mathcal{R}(A_C^\dagger) = \{f \in C \mid A_C^\dagger Af = f\} = \{P_C z \mid A_C^\dagger AP_C z = P_C z\}.$$

$$\text{Somit gilt für } P_C z: P_C z = A_C^\dagger AP_C z = A_C^\dagger P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}g = A_C^\dagger g.$$

e) Aus den Voraussetzungen erhält man wie in d) :  $AP_C A^*w = AA_C^\dagger g = P_{A(C)}^\dagger g = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}g$ .

Damit ergibt sich für  $w_n$  :

$$\begin{aligned}\|w_{n+1} - w\|^2 &= \|(w_n - w) + \beta (P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}g - AP_C A^*w_n)\|^2 \\ &= \|(w_n - w) - \beta (AP_C A^*w_n - AP_C A^*w)\|^2 \\ &= \|w_n - w\|^2 - 2\beta (w_n - w, AP_C A^*w_n - AP_C A^*w) \\ &\quad + \beta^2 \|AP_C A^*w_n - AP_C A^*w\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|w_n - w\|^2 - 2\beta (A^*w_n - A^*w, P_C A^*w_n - P_C A^*w) \\
&\quad + \beta^2 \|AP_C A^*(w_n - w)\|^2 \\
&\leq \|w_n - w\|^2 - 2\beta \|P_C(A^*w_n - A^*w)\|^2 + \beta^2 \|AP_C A^*(w_n - w)\|^2 \\
&\leq \|w_n - w\|^2 - 2\beta \|P_C A^*(w_n - w)\|^2 + \beta^2 \|A\|^2 \|P_C A^*(w_n - w)\|^2 \\
&= \|w_n - w\|^2 - \beta(2 - \beta \|A\|^2) \|f_n - A_C^\dagger g\|^2.
\end{aligned}$$

Für die zweite Behauptung des Satzes gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^N \|f_n - A_C^\dagger g\|^2 &\leq (\beta(2 - \beta \|A\|^2))^{-1} \sum_{n=0}^N (\|w_n - w\|^2 - \|w_{n+1} - w\|^2) \\
&= (\beta(2 - \beta \|A\|^2))^{-1} (\|w_0 - w\|^2 - \|w_{N+1} - w\|^2). \quad \square
\end{aligned}$$

ANMERKUNG :

a) Satz 3.2.1 zeigt, daß man für das Verfahren (V2) die Aussage

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n - A_C^\dagger g\|^2 < \infty$$

erhält. Beim Landweber-Verfahren für das unrestringierte Problem konvergieren die Iterierten unter der Voraussetzung  $A^\dagger g \in \mathcal{R}(A^*)$  mit der Abschätzung

$$\|f_n - A^\dagger g\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

[vgl. [6]].

b) Eicke gibt in [5] Kapitel 5.2 eine Modifikation des Verfahrens (V2) an, die für den Fall  $C = X$  anwendbar ist.

Die Stabilität läßt sich ähnlich wie bei (V1) auch für (V2) einfach untersuchen.

**Satz 3.2.2** Für  $g, g^\epsilon \in Y$  gelte  $\|P_{\mathcal{R}(A)}(g - g^\epsilon)\| \leq \epsilon$ . Seien  $w_0, w_0^\epsilon \in \mathcal{R}(A^*)$ .

$w_n, w_n^\epsilon, f_n, f_n^\epsilon$  bezeichnen die zugehörigen Iterierten des Verfahrens (V2), dann gilt für

$$0 < \beta < \frac{2}{\|A\|^2} :$$

$$\|w_{n+1} - w_{n+1}^\epsilon\| \leq \|w_n - w_n^\epsilon\| + \beta \epsilon \leq \|w_0 - w_0^\epsilon\| + (n+1)\beta \epsilon$$

und damit

$$\|f_n - f_n^\epsilon\| \leq \|A\|(\|w_0 - w_0^\epsilon\| + n\beta \epsilon).$$



BEWEIS :

Für die erste Behauptung gilt:

$$\begin{aligned} \|w_{n+1} - w_{n+1}^\epsilon\| &= \|(I - \beta AP_C A^*)w_n - (I - \beta AP_C A^*)w_n^\epsilon + \beta P_{\mathcal{R}(A)}(g - g^\epsilon)\| \\ &\leq \|(I - \beta AP_C A^*)(w_n - w_n^\epsilon)\| + \beta \epsilon \\ &\leq \|w_n - w_n^\epsilon\| + \beta \epsilon. \end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Ungleichung aus:

$$\begin{aligned} &\|w_n - w_n^\epsilon - \beta AP_C A^*(w_n - w_n^\epsilon)\|^2 \\ &= \|w_n - w_n^\epsilon\|^2 - 2\beta (A^*(w_n - w_n^\epsilon), P_C A^*(w_n - w_n^\epsilon)) + \|\beta AP_C A^*(w_n - w_n^\epsilon)\|^2 \\ &\leq \|w_n - w_n^\epsilon\|^2 - \beta (2 - \beta \|A\|^2) \|P_C A^*(w_n - w_n^\epsilon)\|^2 \leq \|w_n - w_n^\epsilon\|^2. \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich:

$$\|w_{n+1} - w_{n+1}^\epsilon\| \leq \|w_0 - w_0^\epsilon\| + (n + 1)\beta \epsilon.$$

Nach Lemma 3.1.2 erhält man die zweite Behauptung des Satzes wie folgt:

$$\begin{aligned} \|f_n - f_n^\epsilon\| &= \|P_C A^* w_n - P_C A^* w_n^\epsilon\| \\ &\leq \|A^* w_n - A^* w_n^\epsilon\| \\ &\leq \|A\|(\|w_0 - w_0^\epsilon\| + n\beta \epsilon). \quad \square \end{aligned}$$

### 3.3 Die gedämpfte Landweber-Iteration

In diesem Abschnitt wird ein nichtstationäres Verfahren eingeführt. Der nichtexpansive Operator  $P_C U$  wird dabei durch kontraktive Operatoren approximiert. Man muß dann jedoch auf die Forderung verzichten, daß  $A_C^\dagger g$  Fixpunkt der Iterationsabbildung ist. Zu einer beliebigen Folge  $\{r_n\} \nearrow 1$  wird die gedämpfte, projizierte Landweber-Iteration definiert als:

$$\begin{aligned} \text{(V3)} \quad f_0 \text{ beliebig, } f_{n+1} &= P_C(r_n U f_n) \\ &= P_C r_n [(I - \beta A^* A) f_n - \beta A^* g]. \end{aligned}$$

Den Zusammenhang zwischen (V3) und der Tikhonov-regularisierten Lösung erkennt man, wenn man (V3) umformuliert:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= P_C r_n [(I - \beta A^* A) f_n + A^* g] \\ &= P_C \left\{ f_n + r_n \beta (A^* g - [A^* A + \frac{1-r_n}{r_n \beta} I] f_n) \right\} \end{aligned}$$

[vgl. [6] Kapitel 5.4]. Der folgende Satz beschreibt diesen Zusammenhang näher.  $\phi_n$  bezeichnet dabei den eindeutigen Fixpunkt des kontraktiven Operators  $P_C r_n U$ .

**Satz 3.3.1**

- a) Für  $0 < r < 1$  entspricht der Fixpunkt von  $P_C r U$  der restringierten Tikhonov-regularisierten Lösung  $T_{\gamma, C} g$  mit  $\gamma = \frac{1-r}{\beta r}$ .
- b) Es sei  $m < n$ . Für die Fixpunkte  $\phi_m, \phi_n$  der Operatoren  $P_C r_m U, P_C r_n U$  gilt die Ungleichung:

$$\|\phi_m - \phi_n\| \leq \frac{r_n - r_m}{r_n(1 - r_m)} \|\phi_n\| .$$

- c) Ist  $r_n$  so gewählt, daß  $\|f_n - \phi_n\| \rightarrow 0$ , dann konvergiert das Verfahren (V3) gegen  $A_C^\dagger g$ .

BEWEIS :

- a) Entsprechend zu Lemma 2.1.2 zeigt man, daß die Tikhonov-regularisierte Lösung zum Regularisierungsparameter  $\frac{1-r}{r\beta}$  als eindeutige Lösung von

$$\min_{f \in C} \|A f - g\|^2 + \frac{1-r}{r\beta} \|f\|^2$$

der eindeutigen Lösung der Variationsungleichung

$$\left( (A^* A + \frac{1-r}{r\beta} I) f - A^* g, f - x \right) \leq 0 \quad \forall x \in C$$

entspricht. Sie ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} (r[(I - \beta A^* A) f + \beta A^* g] - f, f - x) &\geq 0 \quad \forall x \in C \\ \iff (rU f - f, f - x) &\geq 0 \quad (3.3.1). \end{aligned}$$

Es gilt:  $(y - P_C y, P_C y - x) \geq 0 \quad \forall x \in C$ . Daher ist (3.3.1) erfüllt für  $f = P_C U r f$ .

- b) Betrachte Satz 2.3.1. Die Behauptung folgt aus der stetigen Abhängigkeit der Lösung

vom Regularisierungsparameter.

c) Der Fehler bei (V3) läßt sich abschätzen durch:

$$\|f_n - A_{CG}^\dagger\| \leq \|f_n - \phi_n\| + \|\phi_n - A_{CG}^\dagger\|.$$

Dabei strebt  $\|f_n - \phi_n\|$  gegen 0 nach Voraussetzung und  $T_{\gamma,CG}$  gegen  $A_{CG}^\dagger$  gemäß Teil a). Es gilt also:  $\|f_n - A_{CG}^\dagger\| \rightarrow 0$ .  $\square$

Man gibt sich nun spezielle Folgen  $\{r_n\}$  vor, die auch im letzten Kapitel bei der praktischen Realisierung der Verfahren benutzt werden. Das folgende Lemma wird benötigt, um basierend auf diesen  $\{r_n\}$  Konvergenzaussagen bezüglich (V3) treffen zu können.

**Lemma 3.3.2** Für  $0 < \alpha < 1$  sei die Folge  $\{r_n\}$  definiert als  $r_n = (1 + n^{-\alpha})^{-1}$  mit  $r_0 = 0$ . Wenn sich  $x_n$  durch die Rekursion

$$x_{n+1} = r_n x_n + \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+1}(1 - r_n)}$$

berechnet, dann gilt:  $x_n \leq 2n^{\alpha-1}$ .

**BEWEIS :**

Für  $0 < \alpha < 1$  gilt:  $n^\alpha - n \leq 0$  und  $1 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha} \leq 0$ .

Für das Produkt erhält man folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} (n^\alpha - n) \left(1 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha}\right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow n^\alpha - n - (n+1)^{1-\alpha} n^{2\alpha-1} + n^\alpha (n+1)^{1-\alpha} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow n^\alpha (n+1)^{\alpha-1} - n(n+1)^{\alpha-1} - n^{2\alpha-1} + n^\alpha &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (n+1)^{\alpha-1} (n^\alpha + 1 - n - 1) - n^{2\alpha-1} + n^\alpha &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (n+1)^{\alpha-1} (n^\alpha + 1) - (n+1)^\alpha - n^{2\alpha-1} + n^\alpha &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{(n+1)^{\alpha-1}(n^\alpha + 1) - n^{2\alpha-1}} &\leq 1 \quad (3.3.2). \end{aligned}$$

Die Behauptung wird nun durch vollständige Induktion gezeigt:

Die Ungleichung ist erfüllt für  $n = 1$ , denn  $r_0 = 0$  liefert:  $x_1 = 1 \leq 2 \cdot 1^{\alpha-1} = 2$ .

Es gelte nun  $x_n \leq 2n^{\alpha-1}$ .

Für  $n + 1$  folgt:

$$x_{n+1} = r_n x_n + \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+1}(1 - r_n)} \leq \frac{1}{1 + n^{-\alpha}} 2n^{\alpha-1} + \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{(n+1)^\alpha}.$$

Zu zeigen ist:

$$\frac{1}{1 + n^{-\alpha}} 2n^{\alpha-1} + \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \leq 2(n+1)^{\alpha-1},$$

es gilt jedoch

$$\frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \leq 2((n+1)^{\alpha-1} - (1 + n^{-\alpha})^{-1} n^{\alpha-1}),$$

da

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1} - (1 + n^{-\alpha})^{-1} n^{\alpha-1}} \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \\ &= \frac{1 + n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{(n+1)^{\alpha-1}(n^\alpha + 1) - n^{2\alpha-1}} \\ & \leq 1 \cdot 2 = 2 \text{ nach (3.3.2)}. \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 3.3.3** Für  $0 < \alpha < 1$  sei die Folge  $\{r_n\}$  definiert wie oben.

a) Falls  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$ , dann konvergiert  $f_n$  gegen  $A_C^\dagger g$ .

b) Falls  $g \in \mathcal{D}(A_C^\dagger)$  und  $A_C^\dagger g \in \mathcal{R}(P_C A^*)$ , dann hat die gedämpfte, projizierte Landweber-Iteration (V3) die Konvergenzordnung  $O(n^{\max\{\alpha-1, -\alpha/2\}})$

$$\|f_n - A_C^\dagger g\| = O(n^{\max\{\alpha-1, -\alpha/2\}}).$$

BEWEIS :

Nach Satz 3.1.1 erhält man für  $m < n$  :

$$\|\phi_m - \phi_n\| \leq \frac{r_n - r_m}{r_n(1 - r_m)} \|\phi_n\|.$$

Die Behauptungen e) (Monotonie) und a) (Konvergenz für exakte Daten) des Satzes 2.3.1 liefern :

$$\begin{aligned} \|f_{n+1} - \phi_{n+1}\| & \leq \|P_C r_n U f_n - \phi_n\| + \|\phi_{n+1} - \phi_n\| \\ & \leq \|P_C r_n U f_n - P_C r_n U \phi_n\| + \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+1}(1 - r_n)} \|A_C^\dagger g\| \\ & \leq r_n \|f_n - \phi_n\| + \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+1}(1 - r_n)} \|A_C^\dagger g\|. \end{aligned}$$

Im Falle  $A_C^\dagger g \neq 0$  folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\|f_{n+1} - \phi_{n+1}\|}{\|A_C^\dagger g\|} &\leq r_n \frac{\|f_n - \phi_n\|}{\|A_C^\dagger g\|} + \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+1}(1 - r_n)} = x_{n+1} \\ &\implies \frac{\|f_n - \phi_n\|}{\|A_C^\dagger g\|} \leq x_n, \text{ wobei } x_n \text{ gem\u00e4\u00df Lemma 3.3.2.} \end{aligned}$$

Damit erh\u00e4lt man die Konvergenz von  $f_n$ , denn nach Lemma 3.3.2 strebt  $x_n$  gegen Null. Falls  $A_C^\dagger g = 0$  ist, dann gilt f\u00fcr alle  $n \geq 0$ , da\u00df  $\phi_n = 0$  und damit  $f_n = P_C(0) = 0 = A_C^\dagger g$ .

b) Es gilt nach Teil a) und Satz 2.3.1 (Konvergenzordnung):

$$\begin{aligned} \|f_n - A_C^\dagger g\| &\leq \|f_n - \phi_n\| + \|\phi_n - A_C^\dagger g\| = O(n^{\alpha-1}) + O\left(\sqrt{\frac{1-r_n}{\beta r_n}}\right) \\ &= O(n^{\alpha-1}) + O(n^{-\alpha/2}). \quad \square \end{aligned}$$

Der Einflu\u00df gest\u00f6rter Daten wird im folgenden Satz untersucht.

**Satz 3.3.4** *Es sei  $\|P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}(g - g^\epsilon)\| \leq \epsilon$ .  $f_n, f_n^\epsilon$  bezeichnen die Iterierten der ged\u00e4mpften, projizierten Landweber-Iteration.*

a) *Dann gilt:*

$$\|f_n - f_n^\epsilon\| \leq \left(\prod_{j=0}^{n-1} r_j\right) \|f_0 - f_0^\epsilon\| + \beta \|A\| \left(\sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=j}^{n-1} r_k\right) \epsilon.$$

b) *Falls  $r_n = (1 + n^{-\alpha})^{-1}$ ,  $r_0 = 0$ , dann sind  $f_1 = f_1^\epsilon = P_C(0)$  und*

$$\|f_n - f_n^\epsilon\| \leq \beta \|A\| \left(\sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=j}^{n-1} r_k\right) \epsilon \leq \beta \|A\| n^\alpha \epsilon.$$

BEWEIS :

a)  $U$  sei definiert wie oben, f\u00fcr  $U_\epsilon$  gelte  $U_\epsilon f_{n+1} = [I - \beta A^* A] f_n - \beta A^* g^\epsilon$ . Dann erh\u00e4lt

man folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_n^\epsilon\| &= \|P_C r_{n-1} [(I - \beta A^* A) f_{n-1} - (I - \beta A^* A) f_{n-1}^\epsilon] \\
&\quad + \beta P_C r_{n-1} A^* (g - g^\epsilon)\| \\
&\leq \|P_C r_{n-1} (I - \beta A^* A) (f_{n-1} - f_{n-1}^\epsilon)\| + r_{n-1} \beta \|A\| \epsilon \\
&\leq r_{n-1} \|f_{n-1} - f_{n-1}^\epsilon\| + r_{n-1} \beta \|A\| \epsilon \\
&\leq \left( \prod_{j=0}^{n-1} r_j \right) \|f_0 - f_0^\epsilon\| + \left( \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=j}^{n-1} r_k \right) \beta \|A\| \epsilon.
\end{aligned}$$

b) Es gilt:  $f_1 = f_1^\epsilon = 0$ , also folgt:

$$\|f_n - f_n^\epsilon\| \leq \left( \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=j}^{n-1} r_k \right) \beta \|A\| \epsilon.$$

Zu zeigen bleibt:

$$z_n := \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=j}^{n-1} r_k \leq n^\alpha.$$

Durch Induktion nach  $n$  erhält man die Behauptung:  $z_1 = 0 \leq 1^\alpha = 1$ .

Sei  $z_n \leq n^\alpha$ , dann gilt:

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= \sum_{j=0}^n \prod_{k=j}^n r_k = r_n + \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=j}^n r_k = r_n + r_n \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=j}^{n-1} r_k \\
&= r_n (1 + z_n) \leq \frac{n^\alpha}{1 + n^\alpha} (1 + n^\alpha) \leq (n+1)^\alpha. \quad \square
\end{aligned}$$

# Kapitel 4

## Numerische Realisierung der Verfahren

In diesem Abschnitt werden zwei Integralgleichungen mittels der in Kapitel 3 vorgestellten Verfahren gelöst. Als Einführung dienen zwei Beispiele, bei denen die zu lösenden Gleichungen auftreten.

### 4.1 Einführende Beispiele

#### 4.1.1 Fredholmsche Integralgleichung

##### Die Dichteverteilung eines Seils

Groetsch [8]: Ein Seil, dessen Dichte sich über seine Länge ändert, hängt frei zwischen zwei horizontalen Punkten. Die vertikale Auslenkung sei klein im Verhältnis zur Länge, die Spannung  $T$  im Seil konstant.

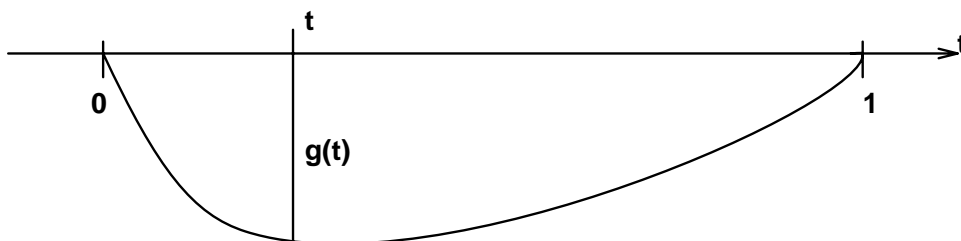
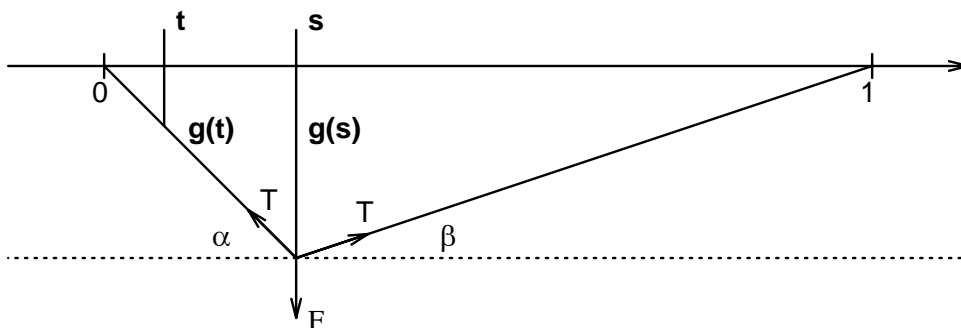


Abbildung 4.1: Auslenkung des Seils

Gesucht ist die Dichteverteilung  $f(s)$ , die zu einer beobachteten Auslenkung  $g(s)$  führt. Am Punkt  $(s, g(s))$  stellt sich dabei folgendes Kräftegleichgewicht ein:

$$T \sin \alpha + T \sin \beta = F.$$


 Abbildung 4.2: Kräftegleichgewicht am Punkt  $(s, g(s))$ 

Für kleine Auslenkungen gilt die Näherung  $\sin \alpha = \tan \alpha$  und  $\sin \beta = \tan \beta$ , so daß man die Gleichung

$$\frac{g(s)}{s} + \frac{g(s)}{1-s} = \frac{F}{T} \iff g(s) = \frac{F}{T}s(1-s)$$

erhält.

Die Ähnlichkeit der Dreiecke  $(0, t, g(t))$  und  $(0, s, g(s))$  für  $t < s$  führt zu:

$$\frac{g(t)}{t} = \frac{g(s)}{s} = \frac{F}{T}(1-s) \iff g(t) = \frac{F}{T}t(1-s).$$

Ebenso findet man für  $t > s$ :

$$g(t) = \frac{F}{T}s(1-t).$$



Also stellt sich  $g(t)$  als

$$g(t) = Fk(t, s)$$

dar, mit

$$k(t, s) = \begin{cases} s(1-t)/T & \text{für } 0 \leq s \leq t \\ t(1-s)/T & \text{für } t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Geht man von einer stetigen Verteilung der Kraft  $F$  hervorgerufen durch die Dichte  $f(s)$  aus, so erhält man für  $g(t)$  :

$$g(t) = Af(t) = \int_0^1 k(t, s)f(s)ds.$$

Dieser Ausdruck entspricht einer Fredholmschen Integralgleichung erster Art .

### 4.1.2 Abelsche Integralgleichung

#### Die Radon-Transformation für radialsymmetrische Funktionen

Gorenflo und Vessella [7]: Die zweidimensionale Radon-Transformation  $\mathbf{R}$  bildet eine gesuchte Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  auf die Menge der Linienintegrale von  $f$  über  $L_{\phi, s}$  mit

$$(\mathbf{R}f)(\phi, s) = \int_{L_{\phi, s}} f(x)S(dx)$$

ab, wobei

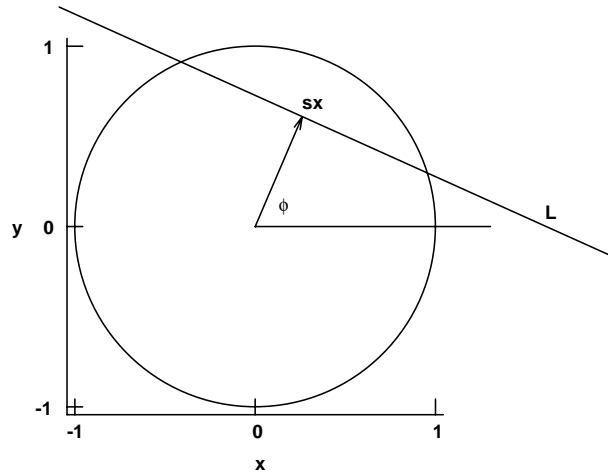
$$\begin{aligned} L_{\phi, s} &:= \{sx(\phi) + tx(\phi)^\perp : t \in \mathbb{R}\}, \quad s \geq 0, \\ x(\phi) &:= (\cos \phi, \sin \phi)^T, \quad x(\phi)^\perp := (-\sin \phi, \cos \phi)^T, \quad \phi \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Wenn die Funktion  $f$  kompakten Träger im Einheitskreis  $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|_2 \leq 1\}$  (mit der euklidischen Norm  $|\cdot|_2$ ) besitzt und eine radialsymmetrische Funktion ist, dann gibt es eine Funktion  $u$ , so daß gilt:

$$f(x) = u(|x|_2), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

So erhält man für die Radon-Transformation:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}f)(\phi, s) &= \int_{L_{\phi, s}} f(x)S(dx) = \int_{L_{\phi, s}} u(|x|_2)S(dx) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u((s^2 + t^2)^{1/2})dt = 2 \int_0^{\infty} u((s^2 + t^2)^{1/2})dt \\ &= 2 \int_s^{\infty} \frac{ru(r)}{(r^2 - s^2)^{1/2}}dr = 2 \int_s^1 \frac{ru(r)}{(r^2 - s^2)^{1/2}}dr. \end{aligned}$$


 Abbildung 4.3: Geometrische Beschreibung,  $L = L_{\phi,s}$ ,  $sx = sx(\phi)$ 

Daraus folgt, daß  $h := \mathbf{R}f$  auch eine radialsymmetrische Funktion mit Träger  $\Omega$  ist. Die letzte Gleichung führt mit  $g(s) := h(\phi, s)$ ,  $s \in [0, 1]$  bis auf eine Konstante zu einer Abelschen Integralgleichung erster Art.

## 4.2 Numerische Lösungen

Als Anwendung für die in Kapitel 3 vorgestellten Verfahren werden in diesem Abschnitt Integralgleichungen mit Restriktion gelöst. Diese besteht darin, daß die Lösungen in dem abgeschlossenen, konvexen Kegel  $C$  der positiven Funktionen in  $L_2[0, 1]$  enthalten sein sollen. Zur Diskretisierung werden die  $(N + 1)$ -dimensionalen Räume  $X_N$  der linearen Splines mit  $N + 1$  Knoten in  $[0, 1]$  zur kanonischen Basis  $\{\phi_j \mid 0 \leq j \leq N\}$ ,  $\phi_j(\frac{k}{N}) = \delta_{jk}$  betrachtet. Dadurch erhält man schließlich die Menge  $C_N := C \cap X_N$ , auf der  $\|AP_{X_N}f - g\|$  minimiert wird. Für die Verfahren ergibt sich folgende Gestalt:

$$(V1) \quad f_{n+1} = P_{C_N}[(I - \beta P_{X_N}A^*AP_{X_N})f_n + \beta P_{X_N}A^*g],$$

$$(V2) \quad z_{n+1} = (I - \beta P_{X_N}A^*AP_{X_N}P_{C_N})z_n + \beta P_{X_N}A^*g, \quad f_n = P_{C_N}z_n,$$

$$(V3) \quad f_{n+1} = P_{C_N}r_n[(I - \beta P_{X_N}A^*AP_{X_N})f_n + \beta P_{X_N}A^*g].$$

Bezüglich der kanonischen Basis von  $X_N$  berechnet sich die Matrix  $P_{X_N}A^*AP_{X_N}$  zu  $((\phi_i, \phi_j))_{i,j}^{-1}((A\phi_i, A\phi_j))_{i,j}$  und der Vektor  $P_{X_N}A^*g$  zu  $((\phi_i, \phi_j))_{i,j}^{-1}((A^*g, \phi_i))_i$  [vgl.[2]].

Die Matrix  $((\phi_i, \phi_j))_{i,j}$  hat folgende Gestalt:

$$B := ((\phi_i, \phi_j))_{i,j} = \frac{1}{6N} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Der Raum  $X_N$  ist isometrisch isomorph zu  $\mathbb{R}^{N+1}$  mit dem Skalarprodukt  $(x, y) = x^T B y$ . Der Projektor  $P_{C_N}$  wird genähert, indem man negative Anteile eines Vektors  $y$ , auf den er wirkt, abschneidet, das heißt:  $P_{C_N} y = \max(0, y_j)$  für  $0 \leq j \leq N$ . Die exakte Berechnung bedarf der Minimierung von  $y^T B y$ , wobei alle Komponenten von  $y$  größer gleich Null sein müssen. In den Tabellen zu den gelösten Integralgleichungen wird als Fehler einer Näherung  $f_n$  die Größe  $\|f_n - P_{X_N} A_C^\dagger g\|_{X_N}$  angegeben. Die Störung in den Daten wurde durch Addition von  $c \sin(j\pi/4)$  zur  $j$ -ten Komponente des Vektors  $P_{X_N} A^* g$  erzeugt. In den gerechneten Beispielen entspricht  $N = 64$ .

### 4.2.1 Lösung einer Fredholmschen Integralgleichung

Als erste Anwendung der vorgestellten Verfahren soll eine Fredholmsche Integralgleichung erster Art

$$\begin{aligned} A f(t) &= g(t), \\ A f(t) &= \int_0^1 k(s, t) f(s) ds \end{aligned}$$

gelöst werden. Das folgende Problem wurde aus Eicke [5] entnommen. Für den Kern des Integraloperators gelte:

$$k(t, s) = \begin{cases} s(1-t) & \text{für } 0 \leq s \leq t \\ t(1-s) & \text{für } t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Der Operator  $A$  ist dann selbstadjungiert und injektiv, seine Bildmenge  $\mathcal{R}(A)$  bestimmt durch  $\mathcal{R}(A) = \{g \in H^2[0, 1] \mid g(0) = g(1)\}$ . Aus der Singulärwertzerlegung

$$\{\sqrt{2} \sin n\pi s, \sqrt{2} \sin n\pi s, (n\pi)^{-2}\}$$

von  $A$  berechnet sich die Norm von  $\|A^*A\|$  zu:

$$\|A^*A\| = \pi^{-4} = \frac{1}{97,4\dots} < \int_0^1 \int_0^1 k^2(t,s) dt ds = \frac{1}{90}.$$

Als rechte Seite von  $Af = g$  wird

$$g(t) = \begin{cases} \frac{7}{960}t & \text{für } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{6}t^3 - \frac{23}{960}t + \frac{7}{960} & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

gesetzt. Daraus ergibt sich für die exakte Lösung

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ s(2s - 1)(1 - s) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

In den folgenden Tabellen wird jeweils der Fehler  $\|f_n - P_{X_N}A_C^\dagger g\|_{X_N} = \|f_n - P_{X_N}f\|_{X_N}$  angegeben.  $n$  bezeichnet die Anzahl der Iterationen,

$$\epsilon = \frac{\|c \sin(j\pi/4)\|}{\|P_{X_N}g\|} \text{ mit } j = 0, \dots, N$$

die Größe der Störung.

Zur Erinnerung seien noch einmal die verschiedenen Verfahren angegeben.

Für die Verfahren (V1), (V2) und (V3) gilt:

(V1)	$f_n = (P_C U)^n f_0$
(V2)	$z_n = z_{n-1} + \beta A^*(g - A P_C z_{n-1}), f_n = P_C z_n$
(V3)	$f_n = P_C (r_{n-1} U f_{n-1}).$

Tabelle 4.1:  $N = 64$ ,  $\beta = 90$ ,  $r_n = (1 - n^{-0.95})^{-1}$ ,  $\alpha = 0.95$ ,  $c = 6.665E - 9$ 

Verfahren	(V1)	(V2)	(V3)	(V1)	(V2)	(V3)
$n$	$\epsilon = 0$			$\epsilon = 1E - 3$		
0	$4.87E - 2$	$4.87E - 2$	$4.87E - 2$	$4.87E - 2$	$4.87E - 2$	$4.87E - 2$
1	$3.83E - 2$	$3.83E - 2$	$4.04E - 2$	$3.83E - 2$	$3.83E - 2$	$4.04E - 2$
10	$2.66E - 2$	$2.66E - 2$	$3.31E - 2$	$2.66E - 2$	$2.66E - 2$	$3.31E - 2$
100	$5.07E - 3$	$5.07E - 3$	$1.48E - 2$	$5.73E - 3$	$5.73E - 3$	$1.52E - 2$
200	$2.58E - 3$	$2.58E - 3$	$9.76E - 3$	$5.28E - 3$	$5.26E - 3$	$1.07E - 2$
300	$2.18E - 3$	$2.18E - 3$	$7.39E - 3$	$7.12E - 3$	$7.09E - 3$	$8.85E - 3$
400	$1.98E - 3$	$1.98E - 3$	$6.01E - 3$	$9.18E - 3$	$9.15E - 3$	$8.21E - 3$
500	$1.82E - 3$	$1.82E - 3$	$5.12E - 3$	$1.12E - 2$	$1.11E - 2$	$8.21E - 3$
600	$1.69E - 3$	$1.68E - 3$	$4.49E - 3$	$1.34E - 2$	$1.33E - 2$	$8.61E - 3$
1000	$1.32E - 3$	$1.32E - 3$	$3.21E - 3$	$2.11E - 2$	$2.12E - 2$	$1.17E - 2$
Minimum	-	-	-	$4.80E - 3$	$4.80E - 3$	$8.15E - 3$
$n$	-	-	-	148	148	447

Für gestörte Daten tritt wie erwartet Semikonvergenz auf, das heißt, daß der Fehler sich zunächst mit wachsendem  $n$  verkleinert, dann jedoch wieder wächst. In diesem Fall muß bei größerem  $\beta$  die Iteration früher abgebrochen werden. Die Verfahren (V1) und (V2) liefern in allen Fällen fast identische Resultate. In den Abbildungen wird das Fehlerverhalten von (V1) und (V3) in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationen für  $\beta = 90$  und  $\beta = 180$  jeweils für gestörte (gestrichelte Linie) und exakte Daten (durchgezogene Linie) dargestellt. Der zweite Wert von  $\beta$  ist größer als nach Voraussetzung zugelassen.

Tabelle 4.2:  $N = 64$ ,  $\beta = 180$ ,  $r_n = (1 - n^{-0.95})^{-1}$ ,  $\alpha = 0.95$ ,  $c = 6.665E - 9$

Verfahren	(V1)	(V2)	(V3)	(V1)	(V2)	(V3)
$n$	$\epsilon = 0$			$\epsilon = 1E - 3$		
0	$4.87E - 2$	$4.87E - 2$	$4.87E - 2$	$4.87E - 2$	$4.87E - 2$	$4.87E - 2$
1	$4.34E - 2$	$4.34E - 2$	$3.82E - 2$	$4.34E - 2$	$4.34E - 2$	$3.82E - 2$
10	$1.96E - 2$	$1.94E - 2$	$2.79E - 2$	$1.97E - 2$	$1.94E - 2$	$2.80E - 2$
100	$2.59E - 3$	$2.58E - 3$	$9.55E - 3$	$5.27E - 3$	$5.26E - 3$	$1.05E - 2$
200	$1.98E - 3$	$1.98E - 3$	$5.87E - 3$	$9.17E - 3$	$9.15E - 3$	$8.15E - 3$
300	$1.68E - 3$	$1.68E - 3$	$4.39E - 3$	$1.33E - 2$	$1.33E - 2$	$8.65E - 3$
400	$1.47E - 3$	$1.47E - 3$	$3.60E - 3$	$1.75E - 2$	$1.76E - 2$	$1.01E - 2$
500	$1.31E - 3$	$1.32E - 3$	$3.15E - 3$	$2.11E - 2$	$2.11E - 2$	$1.19E - 2$
600	$1.18E - 3$	$1.20E - 3$	$2.87E - 3$	$2.46E - 2$	$2.46E - 2$	$1.38E - 2$
1000	$8.51E - 4$	$8.73E - 4$	$2.83E - 3$	$3.79E - 2$	$3.79E - 2$	$2.18E - 2$
Minimum	-	-	-	$4.78E - 3$	$4.78E - 3$	$8.11E - 3$
$n$	-	-	-	73	74	218

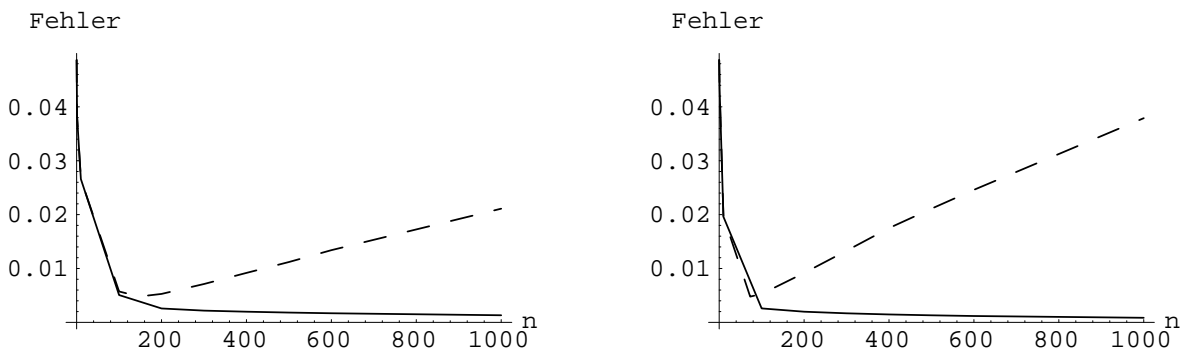


Abbildung 4.4: (V1): Das Fehlerverhalten für  $\beta = 90$  und  $\beta = 180$  bei gestörten (gestrichelte Linie) und exakten (durchgezogene Linie) Daten.

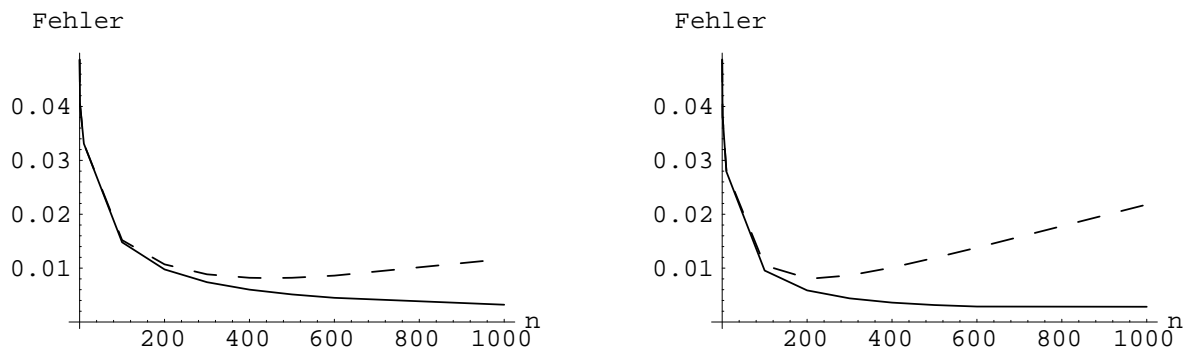


Abbildung 4.5: (V3): Das Fehlerverhalten für  $\beta = 90$  und  $\beta = 180$  bei gestörten (gestrichelte Linie) und exakten (durchgezogene Linie) Daten,  $\alpha$  hat jeweils den Wert 0.95.

### 4.2.2 Lösung einer Abelschen Integralgleichung

Als zweite Anwendung wird nun eine Abelsche Integralgleichung

$$\begin{aligned}
 Af(x) &= g(x), \\
 Af(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x (x-y)^{-1/2} f(y) dy
 \end{aligned}$$

mittels (V1) – (V3) gelöst. Es existiert zu ihr folgende Inversionsformel:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^y (y-x)^{-1/2} g(x) dx.$$

Darin taucht jedoch eine Differentiation auf, die sich bei gestörten Daten numerisch ungünstig auswirkt.

Das folgende Problem stammt aus Louis [14]. Für den Raum  $X = L_2(0, 1)$  betrachtet man den Operator  $Af(x) = g(x)$ . Als rechte Seite wird

$$g(x) = 3 \frac{\sqrt{\pi}}{8} x^2$$

gewählt, womit man als exakte Lösung

$$f(x) = x^{3/2}$$

erhält. Für die Wahl des Parameters  $\beta$  in der Iterationsvorschrift wird, wie im Anhang B erläutert, eine Abschätzung aus Gorenflo und Vessella [7] herangezogen:

$$\|A_\alpha f\|_{L^r(0,b)} \leq M_2(\alpha, b, r) \|K\|_{L^\infty(T)} \|f\|_{L^{1/\alpha}(0,a)}$$

mit  $M_2(\alpha, b, r) = \frac{b^{1/r}}{\Gamma(\alpha)} (1 + (1 - \alpha)r)^{1-\alpha+\frac{1}{r}}$ .

Setzt man  $K = 1$ ;  $r = 2$ ;  $\alpha = \frac{1}{2}$ ;  $b = 1$ ;  $a = 1$ , so führt diese Ungleichung zu:

$$\frac{\|Af\|}{\|f\|} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Damit findet man als "sichere" obere Schranke für  $\beta$  :

$$\beta \leq \frac{\pi}{2} = 1.5707 \dots < \frac{2}{\|A\|^2}.$$

In den Tabellen ist wieder der Fehler  $\|f_n - P_{X_N} A_{CG}^\dagger g\|_{X_N} = \|f_n - P_{X_N} f\|_{X_N}$  angegeben. Die Größe  $\epsilon$  bezeichnet die Störung:

$$\epsilon = \frac{\|c \sin(j\pi/4)\|}{\|P_{X_N} g\|} \text{ mit } j = 0, \dots, N.$$

Tabelle 4.3:  $N = 64$ ,  $\beta = 1.6$ ,  $r_n = (1 - n^{-0.95})^{-1}$ ,  $\alpha = 0.95$   $c = 5E - 6$

Verfahren	(V1)	(V2)	(V3)	(V1)	(V2)	(V3)
$n$	$\epsilon = 0$			$\epsilon = 1E - 3$		
0	4.99E - 1	4.99E - 1	4.99E - 1	4.99E - 1	4.99E - 1	4.99E - 1
1	2.99E - 1	2.99E - 1	3.41E - 1	2.99E - 1	2.99E - 1	3.41E - 1
10	1.02E - 1	1.02E - 1	1.81E - 1	1.02E - 1	1.02E - 1	1.81E - 1
100	2.73E - 2	2.73E - 2	5.75E - 2	2.40E - 2	2.40E - 2	5.61E - 2
200	1.42E - 2	1.42E - 2	3.88E - 2	1.34E - 2	1.34E - 2	3.62E - 2
300	8.05E - 3	8.05E - 3	3.00E - 2	1.29E - 2	1.29E - 2	2.69E - 2
400	4.83E - 3	4.83E - 3	2.45E - 2	1.45E - 2	1.45E - 2	2.14E - 2
500	3.20E - 3	3.20E - 3	2.08E - 2	1.58E - 2	1.58E - 2	1.79E - 2
600	2.44E - 3	2.44E - 3	1.80E - 2	1.66E - 2	1.66E - 2	1.57E - 2
1000	1.93E - 3	1.93E - 3	1.17E - 2	1.76E - 2	1.76E - 2	1.27E - 2
Minimum	-	-	-	1.25E - 2	1.25E - 2	-
$n$	-	-	-	252	252	-



Der Wert von  $\beta$  in der zweiten Rechnung ist wieder größer als zugelassen. Das Phänomen der Semikonvergenz tritt bei der Lösung der Abelschen Integralgleichung nicht so stark auf wie in der ersten Anwendung. In den Abbildungen wird für die Verfahren (V1) und (V3) jeweils der Fehler in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationen dargestellt. Die gestrichelte Linie beschreibt den Verlauf für gestörte Daten, die durchgezogene den für exakte Daten. Der Parameter  $\beta$  nimmt die Werte 1.6 und 2.8 an.

Tabelle 4.4:  $N = 64$ ,  $\beta = 2.8$ ,  $r_n = (1 - n^{-0.95})^{-1}$ ,  $\alpha = 0.95$ ,  $c = 5E - 6$

Verfahren	(V1)	(V2)	(V3)	(V1)	(V2)	(V3)
$n$	$\epsilon = 0$			$\epsilon = 1E - 3$		
0	$4.99E - 1$	$4.99E - 1$	$4.99E - 1$	$4.99E - 1$	$4.99E - 1$	$4.99E - 1$
1	$3.61E - 1$	$3.61E - 1$	$2.95E - 1$	$3.61E - 1$	$3.61E - 1$	$2.95E - 1$
10	$9.62E - 2$	$1.30E - 1$	$1.35E - 1$	$9.58E - 2$	$7.63E - 2$	$1.35E - 1$
100	$1.65E - 2$	$1.65E - 2$	$4.14E - 2$	$1.45E - 2$	$1.46E - 2$	$3.90E - 2$
200	$6.16E - 3$	$6.16E - 3$	$2.65E - 2$	$1.37E - 2$	$1.37E - 2$	$2.33E - 2$
300	$2.94E - 3$	$2.94E - 3$	$1.96E - 2$	$1.61E - 2$	$1.61E - 2$	$1.69E - 2$
400	$2.12E - 3$	$2.12E - 3$	$1.55E - 2$	$1.71E - 2$	$1.71E - 2$	$1.41E - 2$
500	$1.96E - 3$	$1.96E - 3$	$1.29E - 2$	$1.75E - 2$	$1.75E - 2$	$1.30E - 2$
600	$1.93E - 3$	$1.93E - 3$	$1.10E - 2$	$1.77E - 2$	$1.77E - 2$	$1.26E - 2$
1000	$1.92E - 3$	$1.92E - 3$	$7.10E - 3$	$1.77E - 2$	$1.77E - 2$	$1.32E - 2$
Minimum	-	-	-	$1.25E - 2$	$1.25E - 2$	$1.26E - 2$
$n$	-	-	-	143	144	646

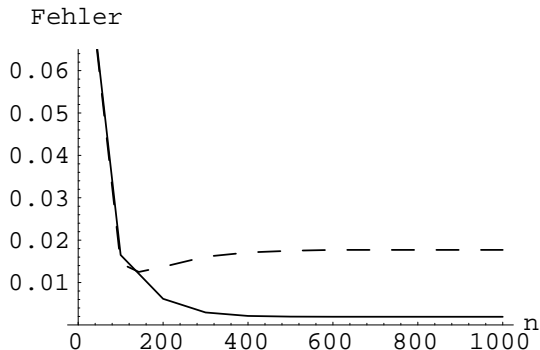
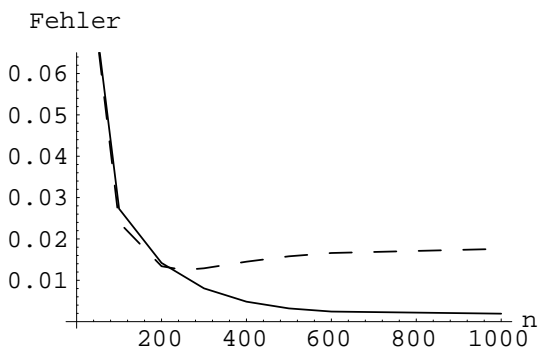


Abbildung 4.6: (V1): Das Fehlerverhalten für  $\beta = 1.6$  und  $\beta = 2.8$  bei gestörten (gestrichelte Linie) und exakten (durchgezogene Linie) Daten.

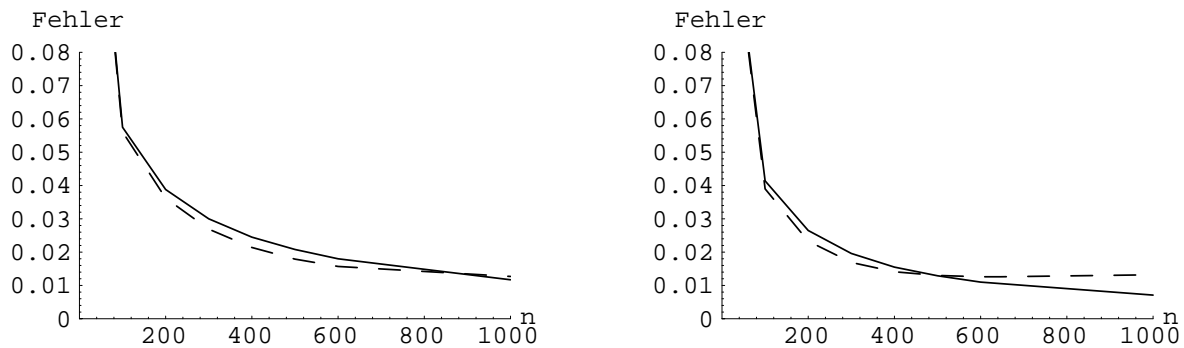


Abbildung 4.7: (V3): Das Fehlerverhalten für  $\beta = 1.6$  und  $\beta = 2.8$  bei gestörten (gestrichelte Linie) und exakten (durchgezogene Linie) Daten,  $\alpha$  hat jeweils den Wert 0.95.

### 4.3 Ausblick auf nichtlineare Probleme und Literatur

Es gibt eine ganze Reihe von Veröffentlichungen zum Thema Iterationsverfahren zur Lösung inverser Probleme, speziell auch zum Landweber-Verfahren. Die in Abschnitt 4.3.2 angegebene Literatur bezieht sich allein auf nichtlineare inverse Probleme.

#### 4.3.1 Das nichtlineare Landweber-Verfahren

Setzt man  $F(f_k) = Af_k$ , so hat die Verallgemeinerung der Landweber-Iteration zu einer nichtlinearen Operatorgleichung die Gestalt:

$$f_{k+1} = f_k + F'(f_k)^*(g - F(f_k)), k \in \mathbb{N}.$$

$F'$  bezeichnet die Fréchet-Ableitung von  $F$ , an die jeweils Stetigkeitsforderungen gestellt werden. Die Gleichung entspricht der des herkömmlichen Verfahrens, wenn  $F(f) = Af$  linear ist.

### 4.3.2 Weiterführende Literatur

Einen allgemeinen Überblick über die Regularisierung inverser Probleme bieten Engl, Hanke und Neubauer in [6]. Sie beschäftigen sich auch eingehend mit der Behandlung nichtlinearer Aufgabenstellungen. Als Lösungsverfahren für diese Problemklasse werden die Tikhonov-Regularisierung und Iterationsverfahren untersucht.

Hanke, Neubauer und Scherzer geben in [10] eine Konvergenzrate des Landweber-Verfahrens für nichtlineare Probleme an. In der Herleitung dieser Aussage ersetzen sie die übliche Voraussetzung der Nichtexpansivität von  $F'(f)^*(g - F(f))$ , die sich oft nur schwer zeigen läßt, durch eine lokale Eigenschaft von  $F$  in einer Kugel  $\mathcal{B}_\rho(f_0)$  mit Radius  $\rho$  um  $f_0$  :

$$\begin{aligned} \|F(f) - F(\bar{f}) - F'(f)(f - \bar{f})\| &\leq \eta \|F(f) - F(\bar{f})\| \quad (4.3.1) \\ \forall f, \bar{f} \in \mathcal{B}_\rho(f_0) \subset \mathcal{D}(A), \quad 0 &\leq \eta \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Fréchet-Ableitung  $F'$  soll lokal gleichmäßig beschränkt sein. Für  $\|g - g^\epsilon\| \leq \epsilon$  geben sie dann als bestmögliche Konvergenzaussage für die Lösung

$$\|F^\dagger g - f_{k^*(\epsilon)}^\epsilon\| = O(\epsilon^{1/2})$$

an, wobei für die Bestimmung von  $k^*(\epsilon)$  als höchstem, zulässigen Iterationsindex ein Abbruchkriterium angegeben wird.

F. Hettlich und W. Rundell betrachten in [11] ein inverses, nichtlineares Potentialproblem, das mittels Iterationsverfahren gelöst wird. Sie stellen dabei Newton-Verfahren der Landweber-Iteration entgegen, die im Vergleich zu anderen Methoden nur sehr langsam konvergiert. Es wird jedoch auf Situationen hingewiesen, in denen dieser Nachteil auch positive Konsequenzen mit sich bringt. Bei stark schlecht gestellten Problemen divergieren Newton-Verfahren oft schon, bevor man eine hinreichend gute Näherung an die exakte Lösung erhält.

Scherzer führt in [23] die Veröffentlichung von Hanke, Neubauer und Scherzer [10] weiter aus. Er liefert eine geometrische Interpretation der Gleichung (4.3.1) und eine Zusammenstellung des Konvergenzverhaltens der nichtlinearen Landweber-Iteration für verschiedene Forderungen an den Operator  $F$ .

# Anhang A

## Projektoren

Alt [1] beschreibt in Kapitel 7 ausführlich die algebraischen Eigenschaften von Projektoren. Der Schwerpunkt liegt jedoch auf orthogonalen Projektoren. Zarantonello [25] betrachtet diese Operatoren allgemein auf konvexen Mengen.

### Definition und Eigenschaften

**Definition A.0.1**  *$C$  sei ein konvexer, abgeschlossener Unterraum des Hilbertraumes  $X$ . Eine lineare Abbildung  $P : X \rightarrow X$  heißt (lineare) Projektion auf  $C$ , falls gilt:*

$$P^2 = P \text{ und } \mathcal{R}(P) = C.$$

*Dies ist äquivalent zu*

$$P : X \longrightarrow C \text{ und } P = I \text{ auf } C.$$

$P_C x$  bezeichne die Projektion von  $x \in X$  auf  $C$ . Die charakteristische Eigenschaft von  $P_C x$  lautet:

$$(A) \quad \|x - P_C x\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in C$$

Ihr Beweis ergibt sich aus dem Projektionssatz [vgl. Alt [1], Abschnitt 2.17]. Er sichert auch die Existenz und Eindeutigkeit der Abbildung  $P$ . Zarantonello [25] leitet aus (A) weitere Merkmale her.

**Lemma A.0.2** *Es ergeben sich folgende Aussagen für  $P_C$ :*

- a) *(A) ist äquivalent zu:  $(x - P_C x, P_C x - y) \geq 0 \quad \forall y \in C, x \in \mathcal{D}(P_C)$ .*  
 b) *Für alle  $x, y \in \mathcal{D}(P_C)$  gilt: (B)  $(x - P_C x, P_C x - P_C y) \geq 0$ .*  
 c)  *$((I - P_C)x - (I - P_C)y, P_C x - P_C y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(P_C)$   
 ist äquivalent zu:  $(x - y, P_C(x - y)) \geq \|P_C x - y\|^2$  für  $y \in C$ .*

**BEWEIS :**

- a) Es gilt:  $\|x - P_C x\|^2 - \|x - y\|^2 = \|x - P_C x\|^2 - \|(x - P_C x) + (P_C x - y)\|^2$   
 $= -2(x - P_C x, P_C x - y) - \|P_C x - y\|^2 \leq 0$ . Es folgt also (A) aus a).

Umgekehrt läßt sich a) mit  $y' = ty + (1-t)P_C x, 0 \leq t \leq 1$  anstelle von  $y$  schreiben als:

$$\|x - P_C x\|^2 - \|x - y'\|^2 = -2t(x - P_C x, P_C x - y) - t^2\|P_C x - y\|^2.$$

Falls nun (A) gilt, folgt nach Division durch  $t$  für  $t \rightarrow 0$  a).

b) Die Behauptung b) folgt aus a), da  $P_C y \in C$  [siehe auch Zarantonello [25] Theorem 1.1].

c) Die Gleichung in Behauptung c) erhält man, indem man zu Gleichung (B) denselben Ausdruck jedoch mit vertauschtem  $x$  und  $z$  addiert. Die Äquivalenz folgt für  $y \in C$ .

□

# Anhang B

## Zur Norm des Abelschen Integraloperators

In dem folgenden Teil sollen Ungleichungen aufgeführt werden, die dabei helfen, die Norm des Abelschen Integraloperators

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt, \quad 0 \leq x \leq a$$

in  $L^p$ -Räumen abzuschätzen. Für  $a$  gilt:  $0 < a < +\infty$ ,  $\Gamma(s)$  entspricht der Gammafunktion.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts stammen aus Gorenflo und Vessella [7].

### B.1 Stetigkeit des Abelschen Integraloperators $J^\alpha$ in $L^p$ -Räumen

Für auf  $\mathbb{R}$  definierte Funktionen  $f, g$  bezeichnet man das Integral

$$(f * g) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

als Faltung von  $f$  und  $g$ .

Die Wirkung des Abelschen Operator auf  $f$  entspricht einer Faltung dieser Funktion mit einem  $\Phi_\alpha(x)$ . Es gilt

$$J^\alpha f = \Phi_\alpha(x) * \bar{f} \quad (1)$$

auf  $(0, a)$ , wobei

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

und

$$\bar{f} = \begin{cases} f & \text{für } 0 < x \leq a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für Faltungen gilt die folgende Ungleichung, auf die sich auch die weiter unten angeführten Abschätzungen zurückführen lassen.

**Satz B.1.1** (*Youngsche Ungleichung*)

Es seien  $f \in L^q(\mathbb{R})$  und  $g \in L^p(\mathbb{R})$  mit  $1 \leq q \leq \infty$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ . Dann gilt:

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^q(\mathbb{R})} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

wobei

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

BEWEIS : Siehe z.B.: Zeidler [27].

Dieser Satz liefert zusammen mit (1) die erste Abschätzung für  $\|J^\alpha f\|$ .

**Satz B.1.2** Es sei  $f \in L^p(0, a)$  mit  $0 < a < \infty$ ,  $1 \leq p \leq 1/\alpha$  und  $s = p/(1 - p(\alpha - \epsilon))$ ,  $\epsilon > 0$ . Dann gilt:

$$\|J^\alpha f\|_{L^s(0, a)} \leq \frac{a^\epsilon}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \frac{1 - \alpha}{\epsilon}\right)^{1 - \alpha + \epsilon} \|f\|_{L^p(0, a)}.$$

BEWEIS : Mit der Wahl von  $s$  erhält man für  $q : q = 1 - \alpha + \epsilon$ . Die Behauptung ergibt sich dann aus der Youngschen Ungleichung, wenn man für obiges  $q$  die Norm  $\|\Phi_\alpha(x)\|_q$  berechnet.

Unter der Zusatzbedingung  $1 < p < \frac{1}{\alpha}$  läßt sich eine schärfere Abschätzung als die in Satz B.1.2 beweisen.

**Satz B.1.3** *Es seien  $0 < a \leq \infty$  und  $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ , dann gilt die Ungleichung:*

$$\|J^\alpha f\|_{\frac{p}{1-\alpha p}(0,a)} \leq M(\alpha, p) \|f\|_{L^p(0,a)}$$

*mit einer Konstanten  $M$ , die von  $\alpha$  und  $p$  abhängt.*

**BEWEIS :** Siehe Gorenflo und Vessella [7].

Aus der vorherigen Behauptung folgt, daß  $J^\alpha$  als Operator von  $L^{\frac{1}{\alpha}}(0, a)$  nach  $L^\infty(0, a)$  nicht stetig sein kann.

$J^\alpha$  kann verallgemeinert werden zu einem Operator  $A_\alpha$ , der wie folgt definiert ist:

$$(A_\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma} \int_0^x \frac{K(x, t) f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad 0 \leq x \leq a,$$

wobei  $K$  eine Funktion auf  $T = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq x \leq a\}$  ist. In der Anwendung aus Kapitel 4 gilt jedoch:  $K \equiv 1$ . Schließlich liefert der letzte Satz dieses Abschnitts basierend auf  $A_\alpha$  die gewünschte Abschätzung für die Norm des Abelschen Integraloperators.

**Satz B.1.4** *Für den Abelschen Integraloperator  $A_\alpha$  gilt:*

*$A_\alpha$  ist stetig als Operator von  $L^{\frac{1}{\alpha}}(0, a)$  nach  $L^r(0, b)$  für alle  $\epsilon \in ]0, \frac{\alpha}{1-\alpha}]$ ,  $r \geq 1$ ,  $b \in [0, a]$ , ( $b < \infty$  wenn  $a = \infty$ ).*

*Es gilt die Ungleichung:*

$$\|A_\alpha f\|_{L^r(0,b)} \leq M_2(\alpha, b, r) \|K\|_{L^\infty(T)} \|f\|_{L^{\frac{1}{\alpha}}(0,a)},$$

*mit  $M_2(\alpha, b, r) = \frac{b^{\frac{1}{r}}}{\Gamma(\alpha)} (1 + r(1 - \alpha))^{1-\alpha+\frac{1}{r}}$ .*

**BEWEIS :** Die Behauptung folgt aus Satz B.1.3 für  $r = \frac{1}{\epsilon}$ .

Damit läßt sich nun  $\beta = \frac{2}{\|A\|^2}$  aus den Verfahren (V1)-(V3) für den Abelschen Integraloperator abschätzen.



# Literaturverzeichnis

- [1] Alt, H., W. (1992): *Lineare Funktionalanalysis*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [2] Bronstein, I., N. & Semendjajew, K., A. (1991): *Taschenbuch der Mathematik, Band 2*. Harri Deutsch Verlag, Thun.
- [3] Browder, F., E. & Petryshyn, W., V. (1967): *Construction of Fixed Points of Nonlinear Mappings in Hilbert Space*. Bull. Amer. Math. Soc. 20, S.:197-228.
- [4] Eicke, B. (1992): *Iteration Methods for Convexly Constrained Ill-Posed Problems in Hilbert Space*. Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 13 (5&6), S.: 413-429.
- [5] Eicke, B. (1991): *Konvex-restringierte schlechtgestellte Probleme und ihre Regularisierung durch Iterationsverfahren*. Thesis, Technische Universität, Berlin.
- [6] Engl, H., W., Hanke, M. & Neubauer A. (1996): *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- [7] Gorenflo, R. & Vessella, S. (1991): *Abel Integral Equations*. Lecture Notes in Mathematics Vol. 1461, Springer, Berlin, Heidelberg, 1st edition.
- [8] Groetsch, C., W. (1993): *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*. Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1st edition.
- [9] Hämmerlin, G. & Hoffmann, K.-H. (1994): *Numerische Mathematik*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [10] Hanke, M., Neubauer, A. & Scherzer, O. (1993): *A Convergence Analysis of Landweber Iteration for Nonlinear Ill-Posed Problems*. Numerische Mathematik 12, S.: 21-37.

- [11] Hettlich, F. & Rundell, W. (1996): *Iterative Methods for the Reconstruction of an Inverse Potential Problem*. Inverse Problems Vol. 12, Nr. 3, S.: 252-266.
- [12] Louis, A., K. (1989): *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. Teubner Verlag, Stuttgart.
- [13] Louis, A., K. (1992): *Medical Imaging-State of the Art and Future Development*. Inverse Problems 8, S.: 709-738.
- [14] Louis, A., K. (1996): *Constructing an Approximate Inverse for Linear and some Nonlinear Problems in Engineering*. Inverse Problems in Engineering, Proc. of the Engineering Foundation Conference, Le Croisic, 9.-14. Juni 1996.
- [15] Micchelli, C., A. & Utreras, F., I. (1988): *Smoothing and Interpolation in a Convex Subset of a Hilbert Space*. SIAM J. Sci. Statist. Comput. 9, S.: 728-746.
- [16] Natterer, F. (1986): *The Mathematics of Computerized Tomography*. Teubner Verlag, Stuttgart.
- [17] Natterer, F. : When is Constrained Optimization Useful? In: Hämmerlin, G.H und Hoffmann, K.-H, editors, (1983): *Improperly Posed Problems and their Numerical Treatment*. Proc. Oberwolfach 1982, Birkhäuser, ISNM 63, Basel.
- [18] Naylor, A., W. & Sell, G., R. (1982): *Linear Operator Theory in Engineering and Science*. Applied Mathematical Sciences 40, Springer, New York.
- [19] Neubauer, A. (1988): *Tikhonov-Regularization of Ill-Posed Linear Operator Equations on Closed Convex Sets*. J. Approx. Theory 53, S.: 304-320.
- [20] Neubauer, A. (1986): *Tikhonov-Regularization of Ill-Posed Linear Operator Equations on Closed Convex Sets*. Thesis, Universität Linz.
- [21] Opial, Z. (1967): *Weak Convergence of the Sequence of Successive Approximations for Nonexpansive Mappings*. Bull. Amer. math. Soc. 73, S.: 591-597.
- [22] Revalski, J., P. (1987): *Generic Well-Posedness in Some Classes of Optimization Problems*. Acta Universitas Carol.-Math. et Physica Vol. 28, No. 2.

- [23] Scherzer, O. (1995): *Convergence Criteria of Iterative Methods based on Landweber Iteration for Solving Nonlinear Problems*. Journal of Mathematical Analysis and Application No. 194.
- [24] Storey, L., R., O. & Chapron, S. (1987): *Conditions for the Uniqueness of Solutions to a Constrained Linear Inverse Problem*. Inverse Problems No. 1, S.: 249- 271.
- [25] Zarantonello, E., H.: *Projections on Convex Sets in Hilbert Space and Spectral Theory*. In: Zarantonello, E., H., editor, (1971): *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*. Proc. Madison Wisc., S.: 237-424; Academic Press, New York.
- [26] Zeidler, E. (1995): *Applied Functional Analysis; Main Principles and Their Applications*. Applied Mathematical Sciences 109, Springer, New York.
- [27] Zeidler, E. (1995): *Applied Functional Analysis; Application to Mathematical Physics*. Applied Mathematical Sciences 108, Springer, New York.